UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO - BICOCCA

Dipartimento di Fisica

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Fisica

Quantum computing a fotoni ottici

Relatore: Prof. Gianpiero CATTANEO

Correlatore: Prof. Claudio DESTRI

Relazione per la prova finale di:

Eugenio Piasini

Matricola: 072070

Anno Accademico 2007-2008

Abstract

Optical photons present many interesting aspects in the context of the research for suitable physical representations of quantum bits. Photons are chargeless particles, and do not interact strongly with each other, or even with most matter. They can be guided along long distances with low loss in optical fibers, delayed efficiently using phase shifters, and combined easily using beamsplitters. Photons exhibit typical quantum phenomena, such as the interference produced in two-slit experiments. Furthermore, in principle, photons can be made interact with each other if carefully handled. There are many practical problems with this approach; nevertheless it presents, beyond what has already been noted, an appealing conceptual simplicity.

The purpose of this work is to present - at least, in its fundamental principles - a set of optical photon quantum gates that is universal for quantum computation. To do so, we begin by gathering the necessary mathematical and physical tools. We discuss canonical quantization for the electromagnetic field, and we formalize in an abstract context the characteristic properties of every realization of the Fock canonical commutation relationships (CCR). We analyze the class of the spaces where it is possible to give such a realization, and that naturally lend themselves to host the physical model of our interest. Once acquired these bases, we turn ourselves to a particular optic system, the Mach-Zehnder interferometer, and we study the general properties of this system and of its essential constituents. At this point we choose a particular encoding of quantum bit and we look at the optical devices just discussed as elements of a quantum circuit. We then discuss the fundamental ideas that may guide the implementation of some important quantum gates: Hadamard gate, $\pi/8$ gate and controlled-NOT. We conclude by showing that these three quantum gates form a universal set of gates for quantum computation.

Sommario

Nell'ambito della ricerca di sistemi fisici adatti alla codifica di quantum bit, i fotoni ottici presentano molti aspetti attraenti. Sono infatti particelle prive di carica che interagiscono poco tra loro e, in molte situazioni, con ciò che li circonda. Possono essere guidati lungo grandi distanze e con scarse perdite usando le fibre ottiche, ritardati efficientemente con gli sfasatori, e combinati facilmente con i beamsplitter. I fotoni esibiscono comportamenti tipicamente quantistici, come l'interferenza che può essere prodotta negli esperimenti delle due fenditure; in linea di principio, poi, usando speciali accorgimenti è possibile farli interagire l'uno con l'altro. Pur soffrendo ancora di seri problemi pratici, e oltre agli aspetti già evidenziati, questo approccio presenta innegabili vantaggi dal punto di vista della semplicità concettuale.

L'obiettivo di questo lavoro è la presentazione - almeno in termini dei principi fondamentali di funzionamento - di un insieme di porte quantistiche a fotoni ottici che sia universale per il quantum computing. Per raggiungere questo scopo, cominciamo acquisendo gli strumenti matematici e fisici necessari. Discutiamo allora della quantizzazione canonica del campo elettromagnetico, e cogliamo questa occasione per formalizzare in un contesto astratto le proprietà caratterizzanti le realizzazioni delle relazioni di commutazione canoniche secondo Fock (CCR). Analizziamo quindi la classe degli spazi nei quali è possibile fornire tale realizzazione, e che si prestano naturalmente ad ospitare il modello fisico di nostro interesse. Stabilite queste basi, volgiamo la nostra attenzione a un sistema ottico particolare, l'interferometro di Mach-Zehnder, e studiamo le proprietà generali di questo sistema e delle sue parti essenziali. A questo punto, scegliamo una particolare codifica di quantum bit e guardiamo ai dispositivi ottici finora realizzati come elementi di un circuito quantistico. Discutiamo le idee base che potrebbero guidare l'implementazione di alcune importanti porte quantistiche: porta di Hadamard, porta $\pi/8$ e controlled-NOT. Concludiamo, infine, mostrando che queste tre porte quantistiche costituiscono un insieme universale per il quantum computing.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il professor Cattaneo per la pazienza e la disponibilità nei miei confronti, per gli insegnamenti, le discussioni e le occasioni di riflessione che non sono mai mancati; il professor Roberto Leporini per i suggerimenti e l'incoraggiamento.

Ad Alessandro Farsi va la mia gratitudine per il supporto che ha saputo darmi fin dalle prime fasi dei lavori, e a tutti gli abitanti del FISLAB - in particolare Filippo e Marzio - per aver accolto un altro fisico tra le loro variegata fila.

Il ringraziamento più sentito ai miei familiari, per avermi permesso di dedicarmi a questo progetto fornendomi sostegno e comprensione e dimostrando di possedere ottime capacità di sopportazione.

Indice

1	Introduzione	1
2	Oscillatore armonico, corda vibrante e campo elettromagnetico	5
2.1	Oscillatore armonico quantistico monodimensionale	5
2.1.1	Quadro classico	5
2.1.2	Quantizzazione	9
2.1.3	Operatori di creazione ed annichilazione	12
2.2	Corda vibrante fissata ai due estremi: modi normali di oscillazione	17
2.3	Modi normali di oscillazione e quantizzazione canonica del campo elettromagnetico in una cavità	30
3	Relazioni di commutazione canoniche secondo Fock	35
3.1	Proprietà generali	35
3.2	Interpretazione fisica	42
3.3	Rappresentazione matriciale	43
3.4	Spazi di tipo $\mathcal{S}$ e realizzabilità delle CCR secondo Fock	47
4	Interferometro di Mach-Zehnder	53
4.1	Rappresentazione dual-rail	53
4.1.1	Formalismo di Schwinger	56
4.2	Realizzazione dell'interferometro nella rappresentazione dual-rail	59
4.2.1	Realizzazione del beamsplitter	59
4.2.2	Realizzazione del phase shifter	68
4.2.3	Realizzazione dello specchio	69
4.2.4	Realizzazione dell'interferometro	71
4.3	Spazio di Fock a n fotoni	73
5	Porte quantistiche a fotoni ottici	75
5.1	Porta $\pi/8$	75
5.1.1	Definizione	75

5.1.2	Realizzazione fisica	76
5.2	Porta di Hadamard	76
5.2.1	Definizione	76
5.2.2	Realizzazione fisica	77
5.3	Controlled-NOT	78
5.3.1	Definizione: operazioni controlled	78
5.3.2	Realizzazione fisica	80
6	Un insieme universale di porte quantistiche	83
6.1	Universalità delle porte unitarie a due livelli	83
6.2	Universalità di CNOT e porte a singolo qubit	85
6.3	Un insieme discreto e universale di operazioni	87
6.3.1	Approssimazione degli operatori unitari	88
6.3.2	Universalità di Hadamard, CNOT e $\pi/8$	88
7	Conclusioni	93

Capitolo 1

Introduzione

La disciplina del quantum information processing, la cui nascita si identifica con la pubblicazione del celebre articolo di Feynman [6], si pone come obiettivo lo sfruttamento della meccanica quantistica per il calcolo, la comunicazione e la memorizzazione dell'informazione. Questo tipo di ricerca promette grandi miglioramenti in efficienza di calcolo e sicurezza di comunicazione: alcuni esempi sono l'algoritmo di Shor [25] per la fattorizzazione di grandi numeri interi, l'algoritmo di ricerca di Grover [10] e la crittografia quantistica per la comunicazione sicura [26, 2, 9].

Per quanto riguarda l'aspetto computazionale, nell'ultimo decennio la ricerca teorica su limiti e potenzialità di questo nuovo approccio ha, per così dire, ceduto il passo a quella più pratica riguardante le possibili realizzazioni fisiche dei calcolatori quantistici. Infatti, mentre nuovi algoritmi e procedure vengono concepiti solo raramente e con molta difficoltà, lo sforzo costante per dominare sempre meglio gli effetti quantistici ci porta comunque a raggiungere un controllo senza precedenti e una comprensione più profonda di questo aspetto della natura (si vedano in proposito i lavori di Hong *e altri* [11], Ou e Mandel [20], che rivestono anche un certo interesse riguardo agli argomenti che introdurremo successivamente). La costruzione di un computer quantistico richiede un altissimo livello tecnico nella fabbricazione di strumenti di dimensioni che possono spingersi fino alla scala atomica; il compito è reso poi ancora più difficile dalla fragilità intrinseca degli stati quantistici e dalle difficoltà ancora presenti nella comprensione teorica del concetto fondamentale di entanglement. Ad oggi, diverse proposte per l'implementazione fisica dei dispositivi necessari sono in competizione tra loro: ion traps, quantum dots e giunzioni di Josephson sono esempi delle tecnologie più promettenti.

Anche i sistemi ottici quantistici sono candidati di spicco per il quantum computing, dal momento che permettono una naturale integrazione tra computazione e comunicazione quantistica [12]. In particolare, possiamo pensare a diverse ragioni per le quali singoli fotoni potrebbero essere utilizzati per la codifica di quantum bit. Questi infatti sono ampiamente liberi dal ru-

more, o decoerenza, che affligge gli altri sistemi; possono essere facilmente manipolati per realizzare porte logiche a un qubit; permettono, infine, che la codifica venga fatta su diversi gradi di libertà, e che la conversione tra questi sia relativamente semplice (ad esempio, possiamo passare facilmente da una codifica sulla polarizzazione a una sulla direzione di propagazione con l'aiuto di beamsplitter polarizzanti). D'altra parte, la naturale non-interazione reciproca dei fotoni è la causa principale delle difficoltà che incontriamo, dal momento che questa interazione è fondamentale per la realizzazione delle porte logiche a più qubit richieste per la computazione universale (ad esempio, la porta controlled-NOT di cui discuteremo in seguito). Per una panoramica più dettagliata sugli aspetti fisici di questo problema rimandiamo al libro di Ou [21]; d'altra parte, a questo proposito notiamo che alcune recentissime ricerche hanno affermato la fattibilità pratica di CNOT a fotoni ottici sia su scala macroscopica [19] che come circuiti quantistici integrati [22].

Fatte queste premesse, concentriamoci sui temi affrontati in questo lavoro e cerchiamo di rendere le idee generali che ne hanno guidato lo svolgimento. L'obiettivo globale è quello di evidenziare come sia possibile, almeno in linea di principio, ottenere la computazione quantistica universale usando soltanto dispositivi ottici funzionanti con singoli fotoni.

Per raggiungere il nostro obiettivo, dobbiamo innanzitutto acquisire alcuni strumenti matematici e fisici necessari alla comprensione dei fenomeni sui quali si basa la nostra ricerca. Nel capitolo 2, attraverso una riflessione sulle analogie matematiche tra sistemi ondulatori e oscillatore armonico (seguendo, per la parte di elettromagnetismo classico, l'impostazione di Landau e Lifšits [16]), discutiamo la quantizzazione canonica del campo elettromagnetico. Ci concentriamo particolarmente su quello che potremmo chiamare il veicolo naturale di queste analogie, cioè i cosiddetti operatori di creazione e annichilazione $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, caratterizzati dalle relazioni di commutazione canoniche (CCR dall'acronimo inglese) secondo Fock. Nel capitolo 3 generalizziamo il discorso analizzando le proprietà astratte che caratterizzano ogni realizzazione delle CCR in una coppia hilbertiana formata da uno spazio di Hilbert e da una varietà lineare densa in esso; ne traiamo alcune importanti conclusioni sulla fisica dei sistemi regolati da hamiltoniane come quelle di oscillatore armonico e campo elettromagnetico (o, più in generale, di sistemi ondulatori come la corda vibrante quantistica). In particolare, illustriamo l'interpretazione "numero di occupazione" di questi sistemi che ci permette ad esempio di definire il concetto di fotone e di dare un senso ai nomi degli operatori di creazione e annichilazione. Studiamo infine la classe degli spazi astratti (detti di tipo $\mathcal{S}$ [15, 7]) dove è possibile dare una realizzazione delle CCR, deducendone alcune proprietà formali.

Stabilite queste basi, nel capitolo 4 cominciamo a metterle in pratica realizzando un semplice modello quantistico per un interferometro di Mach-Zehnder e per le sue parti principali (beamsplitter, specchi e sfasatore). Ipotizziamo che tutti i fotoni con cui avremo a che fare siano della stessa fissa-

ta frequenza; ammettiamo inoltre di trascurare le complicazioni dovute alle richieste di segnali perfettamente monocromatici e di una durata temporale limitata adottando una semplificazione largamente usata in letteratura [18]. Lavoriamo nella rappresentazione che viene detta dual-rail: dividiamo i dispositivi ottici in due bracci, ciascuno dei quali può essere descritto in uno spazio di Hilbert complesso, separabile e infinito dimensionale, esattamente (per quanto riguarda i tratti di “propagazione libera” dei fotoni) come un oscillatore armonico. La descrizione di tutto l’apparato avviene perciò naturalmente nello spazio prodotto tensore dei due precedenti, diciamo $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, dotato del sonc canonico composto da tutti gli stati che sono prodotto tensore di “stati numero” dei singoli bracci. Il punto centrale della costruzione è ora il formalismo di Schwinger per una coppia di oscillatori armonici, che ci permette di trattare il sistema come un rotatore quantistico in uno spazio tridimensionale opportunamente definito. Lo spazio $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ si riduce alla somma diretta di una serie infinita di settori di superselezione, distinti dal numero totale di fotoni (o, più propriamente, dagli autovalori dell’operatore numero totale di fotoni): grazie a questo formalismo possiamo affermare equivalentemente che a distinguere i diversi settori siano gli autovalori del modulo quadro J^2 del momento angolare per il rotatore. La conservazione dell’energia (cioè del numero di fotoni) diventa quindi esprimibile come “conservazione di J^2 ”, e tutte le trasformazioni indotte dai vari dispositivi ottici (che per ipotesi sono liberi da fenomeni di assorbimento o emissione) sono realizzate da semplici rotazioni o riflessioni nello spazio tridimensionale. Prendendo spunto dall’approccio di Campos [4] e Yurke [27], introduciamo quindi dei modelli specifici per le tre componenti dell’interferometro, giustificandoli mostrandone quantomeno la ragionevolezza. Questi modelli consistono appunto in operatori di rotazione e riflessione che si scompongono naturalmente nelle loro rappresentazioni sui vari settori di superselezione (in particolare, per le rotazioni questa scomposizione corrisponde esattamente a quella in rappresentazioni irriducibili): forniamo allora le formule generali che ne danno le corrispondenti matrici in ciascuno di essi. In particolare, esplicitiamo le matrici per il settore $\mathcal{F}^{(1)}$ a un fotone (isomorfo a $\mathbb{C}^2$) e il settore $\mathcal{F}^{(2)}$ a due fotoni (isomorfo a $\mathbb{C}^3$). Combinando i risultati fin qui ottenuti, scriviamo anche la rappresentazione dell’azione di tutto l’interferometro sia in $\mathcal{H}$ che in ciascun settore di superselezione. Notiamo che la forma assunta in $\mathcal{F}^{(n)}$ dagli operatori introdotti in questo capitolo è esattamente quella richiesta per il quantum computing in logica a $n+1$ valori da Cattaneo e altri [5], anche se non approfondiamo ulteriormente questo collegamento.

Ora che abbiamo i modelli matematici per alcuni dispositivi ottici a due ingressi e due uscite, possiamo passare al quantum computing propriamente detto: nel capitolo 5 scegliamo di operare sempre con un solo fotone per volta (e quindi di porci in $\mathcal{F}^{(1)}$) e codifichiamo un quantum bit nella direzione di propagazione di quest’unica particella (spatial encoding, o codifica spazia-

le). Discutiamo quindi alcune idee che potrebbero servire come guida per la realizzazione di tre particolari porte quantistiche: porta di Hadamard, porta $\pi/8$ e controlled-NOT. Apriamo anche una breve parentesi sulle operazioni controlled in generale. Come già anticipato, la realizzazione pratica del CNOT necessita di un'accurata analisi, che qui non faremo, della dinamica sperimentale, e per questo ci limitiamo a una discussione in linea principio; discussione che, tuttavia, si ispira ai metodi di una collaborazione attualmente in corso con il LENS di Firenze, e che ha lo scopo di realizzare particolari dispositivi che possano servire nell'ambito della quantum metrology come in quello del quantum computing (in particolare, le tecniche sperimentali adottate si ispirano ai lavori di Meystre [17], Arcizet [1], Gigan [8] e Kleckner [13]).

Nel capitolo 6, cominciamo col definire un insieme di porte universale per la computazione quantistica. È questo un insieme a partire dal quale è possibile approssimare arbitrariamente bene qualunque porta quantistica; d'altra parte, questo solleva la questione di una opportuna definizione di *errore* che si introduce utilizzando una certa porta per approssimarne un'altra. Affrontato anche questo punto, e scegliendo di evitare ogni discorso sulla complessità computazionale delle implementazioni discusse, concludiamo mostrando che proprio Hadamard, $\pi/8$ e CNOT costituiscono un insieme di porte universale per la computazione quantistica. Questo - pur tenendo presente tutte le approssimazioni e le semplificazioni fatte - comporta il risultato voluto: il quantum computing universale a fotoni ottici.

Concludiamo questa introduzione segnalando l'articolo di Kok *e altri* [14] come un eccellente punto di partenza per una rassegna sui recenti sviluppi nell'ambito trattato, sia dal punto di vista teorico che da quello sperimentale.

Capitolo 2

Oscillatore armonico, corda vibrante e campo elettromagnetico

2.1 Oscillatore armonico quantistico monodimensionale

2.1.1 Quadro classico

Ricordiamo che dal punto di vista classico l'oscillatore armonico monodimensionale è rappresentabile come una particella di massa m soggetta ad una forza di attrazione la cui intensità è direttamente proporzionale alla distanza x dal centro di attrazione O (assunto come origine degli assi di riferimento) e diretta verso tale punto:

$$F(x) = -kx \quad (2.1)$$

ove k è il *coefficiente di attrazione elastica* (nel caso di una molla, questa costante dipende dal mezzo con cui è costruita la molla). La legge di Newton $F(x) = ma$ si traduce nell'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (2.2)$$

dove si è definita

$$\omega := \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

La soluzione generale di questa equazione differenziale è un moto oscillatorio nello *spazio delle configurazioni* $\mathbb{R}$ della forma

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi) \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

dipendente da due costanti arbitrarie di integrazione A_0 , l'*ampiezza* della oscillazione, e φ , la sua *fase*: il loro valore è determinato dalle condizioni

inziali sulla posizione $x(t_0)$ e velocità $\dot{x}(t_0)$ ad un istante assegnato t_0 . Ciò significa che lo *spazio delle fasi* di un oscillatore armonico monodimensionale classico è il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dello *spazio delle configurazioni* (o posizioni) $x \in \mathbb{R}$ e dello spazio $\dot{x} \in \mathbb{R}$ delle velocità, o per meglio dire, dei *momenti coniugati* $p := m \cdot \dot{x} \in \mathbb{R}$. Pertanto, lo stato meccanico di un oscillatore armonico monodimensionale è descritto da un punto dello spazio delle fasi $s := (x, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e per ogni condizione iniziale assegnata all'istante t_0 , descritta da un opportuno stato $s(t_0) = (x(t_0), p(t_0))$, la collezione di stati dipendente dal parametro temporale t e individuata dalla (2.3)

$$s(t) = (x(t), p(t)) = (A_0 \cos(\omega t + \varphi), -m\omega A_0 \sin(\omega t + \varphi)) \quad (2.4)$$

descrive una *traiettoria ellittica* nello spazio delle fasi della corrispondente dinamica deterministica.

L'energia potenziale associata alla forza conservativa (2.1), quale funzione degli stati meccanici del sistema, sarà data (a meno di una costante additiva arbitraria che poniamo uguale a zero) da

$$U(x, p) = - \int_0^x F(\xi) d\xi = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

Pertanto l'energia totale, somma dell'energia cinetica $T(x, p) = p^2/(2m)$ più quella potenziale ora vista $U(x, p)$, sarà espressa dalla funzione hamiltoniana H definita per ogni stato (x, p) nello spazio delle fasi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dalla legge

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \left[\frac{p^2}{m} + m \omega^2 x^2 \right] \quad (2.5)$$

Come si vede dalla introduzione ora fatta della energia cinetica, energia potenziale e energia totale del sistema fisico in esame, tutte queste *grandezze osservabili* rientrano nella classe generale delle funzioni di classe $\mathcal{C}_\infty$ definite sullo spazio delle fasi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e a valori reali secondo la regola generale che tutte le osservabili classiche sono descritte matematicamente da funzioni $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}_\infty$ che associano ad ogni stato meccanico del sistema $(x, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il valore numerico $f(x, p) \in \mathbb{R}$ assunto da questa osservabile in questo stato. Due di queste osservabili saranno particolarmente usate nel seguito: l'osservabile *identicamente uno* $\mathbf{1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni stato il valore costante $\mathbf{1}(x, p) = 1$ e l'osservabile *identicamente zero* $\mathbf{0} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni stato il valore costante $\mathbf{0}(x, p) = 0$.

L'insieme $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ di tutte queste funzioni ha una naturale struttura di *algebra di Lie* reale $\langle \mathcal{O}(\mathbb{R}^2), +, \cdot, \{, \}, \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$ rispetto alle seguenti operazioni definite per ogni stato $(x, p) \in \mathbb{R}^2$ dalle leggi

(op - 1c)	$(f + g)(x, p) = f(x, p) + g(x, p)$	somma
(op - 2c)	$(\alpha f)(x, p) = \alpha f(x, p)$	prodotto per scalari reali
(op - 3c)	$\{f, g\}(x, p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} \right)(x, p)$	parentesi di Poisson

che risulta essere un'algebra associativa con unità abeliana se oltre alle operazioni (op-c1) e (op-c2) si considera l'ulteriore operazione di *prodotto* di due osservabili:

$$(op-4c) \quad (f \cdot g)(x, p) = f(x, p) \cdot g(x, p)$$

Una volta introdotta la notazione, puramente informale ma la cui utilità sarà compresa successivamente,

$$[f, g]_+ := f \cdot g + g \cdot f$$

allora dalla commutatività del prodotto (op-4c) si ricava la relazione

$$[f, g]_+ = 2(f \cdot g)$$

Si osservi che rientra in questa classe la osservabile *posizione* intesa come funzione di classe $\mathcal{C}_\infty$, denotata con $\mathbf{q} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e che associa ad ogni stato (x, p) la “componente” di posizione (matematicamente essa è la prima proiezione canonica di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$):

$$\mathbf{q}(x, p) = x$$

per la quale $\partial \mathbf{q} / \partial x = 1$ e $\partial \mathbf{q} / \partial p = 0$. In maniera duale si ha l'osservabile *quantità di moto* (o anche *momento*), denotata con $\mathbf{p} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, che ad ogni stato (x, p) associa la sua “componente” di momento (ovvero la seconda proiezione canonica):

$$\mathbf{p}(x, p) = p$$

per la quale $\partial \mathbf{p} / \partial x = 0$ e $\partial \mathbf{p} / \partial p = 1$. Di conseguenza la parentesi di Poisson (op-3c) di queste due osservabili è la funzione identicamente uguale a uno:

$$\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\} = 1 \quad (2.6)$$

mentre il loro prodotto (commutativo) si può esprimere nella forma:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) = \frac{1}{2}[\mathbf{q}, \mathbf{p}]_+ \quad (2.7)$$

Facendo uso di queste due osservabili di posizione e momento, possiamo scrivere l'hamiltoniana del sistema in esame (2.5) in pura notazione funzionale $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ come

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{p}^2}{m} + m \omega^2 \mathbf{q}^2 \right] \quad (2.8)$$

Introduciamo ora due nuove osservabili ausiliarie

$$Q := \sqrt{m} \mathbf{q} \quad P := \frac{1}{\sqrt{m}} \mathbf{p}$$

con corrispondente azione sul generico stato (x, p) del sistema data da

$$Q(x, p) = \sqrt{m}x \quad P(x, p) = \frac{1}{\sqrt{m}}p$$

e la cui parentesi di Poisson sono $\{Q, P\} = \{\mathbf{q}, \mathbf{p}\} = \mathbf{1}$. Allora l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico monodimensionale (2.8) si esprime tramite esse come

$$H = \frac{1}{2} (P^2 + \omega^2 Q^2) \quad (2.9)$$

Facciamo osservare che se si valuta il valore dell'energia (2.5) lungo una traiettoria (2.4) percorsa da un oscillatore armonico nello spazio delle fasi si ottiene

$$H(s(t)) = \frac{1}{2} \left[m(\omega A_0)^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + m(\omega A_0)^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \right] = \frac{m\omega}{2} |A_0|^2$$

Questo risultato esprime il *principio di conservazione* (o di invarianza) dell'energia totale di un oscillatore armonico monodimensionale lungo una qualsiasi sua traiettoria nello spazio delle fasi. Come si vede, la quantità di energia conservata è direttamente proporzionale al quadrato dell'ampiezza A_0 dell'oscillazione, che a sua volta dipende dallo stato iniziale. Questo è un comportamento generale che caratterizza tutti i fenomeni oscillatori.

Per motivi che diverranno chiari nel prossimo paragrafo, introduciamo le funzioni a valori complessi (di cui una è la complessa coniugata dell'altra) definite sullo spazio delle fasi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} (m\omega\mathbf{q} + i\mathbf{p}) \quad (2.10a)$$

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} (m\omega\mathbf{q} - i\mathbf{p}) \quad (2.10b)$$

Allora per esse valgono le eguaglianze

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\omega\hbar}} (\omega Q + iP) \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega\hbar}} (\omega Q - iP) \quad (2.11)$$

da cui si ricava

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (a^* + a) \quad P = i\omega\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (a^* - a) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{q} = \sqrt{\frac{\hbar m}{2\omega}} (a^* + a) \quad \mathbf{p} = i\omega\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (a^* - a) \quad (2.13)$$

Rispetto alle funzioni (2.10) l'hamiltoniana si può esprimere nella forma:

$$H = \hbar\omega(a \cdot a^*) = \frac{\hbar\omega}{2} [a, a^*]_+ \quad (2.14)$$

Infine, il calcolo della loro parentesi di Poisson porta a

$$\{a, a^*\} = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial a^*}{\partial p} - \frac{\partial a}{\partial p} \frac{\partial a^*}{\partial x} = -\frac{i}{\hbar} \mathbf{1} \quad (2.15)$$

Se valutiamo le funzioni a, a^* lungo una qualsiasi delle traiettorie (2.4) otteniamo:

$$a(s(t)) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} A_0 e^{-i(\omega t + \varphi)} \quad (2.16a)$$

$$a^*(s(t)) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} A_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (2.16b)$$

La soluzione dei moti armonici (2.3) può essere posta nella seguente forma in cui sono coinvolte le funzioni a, a^* :

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t - \varphi) = \frac{A_0}{2} [e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}] \quad (2.17a)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [a^*(t) + a(t)] \quad (2.17b)$$

Ricordiamo che nella trattazione dell'equazione differenziale dei moti armonici monodimensionali si usa anche prendere in esame la forma “complessificata”

$$x_c(t) = A_0 e^{-i(\omega t + \varphi)} \in \mathbb{C}$$

che è soluzione *complessa* della equazione differenziale (2.2), la cui parte reale coincide con la (2.3): $Re(x_c(t)) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$, con la costante $A_0 \in \mathbb{R}$ reale. Questa soluzione si può anche porre nella forma

$$x_c(t) = \mathcal{A}_0 e^{-i\omega t}$$

in cui ora il coefficiente da determinarsi tramite le condizioni iniziali è una quantità complessa $\mathcal{A}_0 = A_0 e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ che racchiude le informazioni sull'ampiezza A_0 e la fase φ . Anche la complessa coniugata di $x_c(t)$

$$x_c^*(t) = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \in \mathbb{C}$$

è una soluzione complessa dell'equazione dei moti armonici monodimensionali (2.2) soddisfacente la condizione $Re(x_c^*(t)) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Come succede nelle equazioni differenziali lineari, di cui (2.2) è un caso particolare, la sovrapposizione (i.e., combinazione lineare) di due qualsiasi soluzioni è ancora una soluzione; in particolare la (2.17a) esprime il fatto che la soluzione reale è combinazione lineare delle due soluzioni complesse ora introdotte secondo le

$$x(t) = \frac{1}{2} [x_c^*(t) + x_c(t)] = \frac{\mathcal{A}_0}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}]$$

2.1.2 Quantizzazione

La descrizione quantistica dell'oscillatore armonico monodimensionale si basa sulla coppia hilbertiana caratteristica della descrizione di Schrödinger

$(\mathcal{S}(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R}))$ consistente nello spazio con prodotto interno $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ delle funzioni a valori complessi, definite sull'intero $\mathbb{R}$, di classe C^∞ e a rapida decrescenza all'infinito; questo spazio è denso nello spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R})$ delle funzioni a valori complessi di quadrato integrabile rispetto alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$. Ricordiamo che in tali spazi funzionali il prodotto interno di due funzioni $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ è espresso dall'integrale:

$$\langle f|g \rangle := \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx$$

Le osservabili sono descritte dagli operatori lineari definiti su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ che rendono stabile tale spazio lineare, ovvero operatori lineari $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R})$, che sono hermitiani rispetto al prodotto interno di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ossia tali che per ogni coppia di vettori $\psi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sia soddisfatta l'uguaglianza

$$\langle \psi|A\varphi \rangle = \langle A\psi|\varphi \rangle$$

La collezione $\mathcal{O}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ di tutti questi operatori hermitiani è munita di una struttura di algebra di Lie–Jordan reale rispetto alle seguenti operazioni:

$$\begin{aligned} (op-1q) \quad & (A_1 + A_2)(\psi) = A_1(\psi) + A_2(\psi) \\ (op-2q) \quad & (\alpha A)(\psi) = \alpha A(\psi) \quad \text{per } \alpha \in \mathbb{R} \\ (op-3q) \quad & \{A_1, A_2\}(\psi) = -\frac{i}{\hbar} [A_1, A_2](\psi) \\ (op-4q) \quad & [A_1, A_2]_+(\psi) = (A_1 A_2 + A_2 A_1)(\psi) \end{aligned}$$

Si noti l'introduzione dell'operatore *parentesi di Poisson quantistica* di due operatori hermitiani (op-3q) definito in termini del commutatore $[A_1, A_2] := A_1 A_2 - A_2 A_1$; L'operatore così ottenuto, a differenza del loro commutatore, è a sua volta hermitiano. Risulta comunque il fatto che esso non è nient'altro che un multiplo complesso della parentesi di commutazione, per cui tutte le questioni di commutatività esprimibili attraverso condizioni del tipo $[A_1, A_2] = \mathbb{O}$ si possono facilmente riformulare scrivendo $\{A_1, A_2\} = \mathbb{O}$.

L'operatore hamiltoniano dell'oscillatore armonico monodimensionale si ottiene a partire dall'hamiltoniana classica dell'oscillatore armonico monodimensionale (2.5), sostituendo le osservabili classiche $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$ definite su $\mathbb{R}^2$ con gli operatori hermitiani standard di posizione $\hat{q}$ e di momento $\hat{p}$ definiti su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \hat{q} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \psi \mapsto \hat{q}(\psi) := x\psi \\ \hat{p} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \psi \mapsto \hat{p}(\psi) := -i\hbar \frac{d\psi}{dx} \end{aligned}$$

che soddisfano la relazione di commutazione $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$, ovvero,

$$\{\hat{q}, \hat{p}\} = \mathbb{I} \tag{2.18}$$

Questa rappresentazione quantistica delle osservabili posizione e momento nasce dal confronto della parentesi di Poisson classica tra queste osservabili (2.6) e la corrispondente quantistica ora trovata (2.18). In generale la rappresentazione di Schrödinger dell'algebra di Lie reale delle osservabili classiche $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ nell'algebra di Lie reale delle osservabili quantistiche $\mathcal{O}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ viene fatta attraverso una applicazione

$$\mathcal{R} : \mathcal{O}(\mathbb{R}^2) \mapsto \mathcal{O}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

soddisfacente la richiesta che $\mathcal{R}$ sia un morfismo iniettivo di algebre di Lie, ossia in particolare oltre alla condizione che ogni operatore coinvolto sia immagine di un'unica osservabile classica (iniettività) viene richiesto che siano soddisfatte le seguenti condizioni (morfismo di algebre), qualunque siano le osservabili classiche $f, f_1, f_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ e il numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{R}(f_1 + f_2) = \mathcal{R}(f_1) + \mathcal{R}(f_2) \quad (2.19a)$$

$$\mathcal{R}(\alpha f) = \alpha \mathcal{R}(f) \quad (2.19b)$$

$$\mathcal{R}\{f_1, f_2\} = \{\mathcal{R}(f_1), \mathcal{R}(f_2)\} \quad (2.19c)$$

e l'ulteriore condizione

$$\mathcal{R}(f_1 \cdot f_2) = \frac{1}{2}[\mathcal{R}(f_1), \mathcal{R}(f_2)]_+ \quad (2.19d)$$

Si osserva che, se $\mathcal{R}(f_1)$ e $\mathcal{R}(f_2)$ commutano, allora

$$\mathcal{R}(f_1 \cdot f_2) = \mathcal{R}(f_1) \cdot \mathcal{R}(f_2)$$

Dunque, usando queste regole di rappresentazione delle osservabili classiche in osservabili quantistiche e tenendo presente l'hamiltoniana classica (2.5), l'operatore hamiltoniano quantistico è descritto dall'operatore $\hat{H} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definito esplicitamente dalla

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left[\frac{\hat{p}^2}{m} + m\omega^2 \hat{x}^2 \right] = -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$$

che è hermitiano in quanto $\hat{x}$ e $\hat{p}$ sono entrambi hermitiani.

Facciamo notare che introducendo gli operatori hermitiani su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\hat{Q} = \sqrt{m}\hat{x} \quad \text{e} \quad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p} \quad (2.20)$$

soddisfacenti la regola di commutazione $[\hat{Q}, \hat{P}] = [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, ovvero in termini di parentesi di Poisson $\{\hat{Q}, \hat{P}\} = \mathbb{I}$, possiamo riscrivere l'hamiltoniano come

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\hat{P}^2 + \omega^2 \hat{Q}^2 \right) \quad (2.21)$$

che è il corrispettivo quantistico dell'espressione (2.9).

2.1.3 Operatori di creazione ed annichilazione

Vogliamo ora formalizzare alcune tecniche tipicamente algebriche, che rivestono un ruolo centrale nella teoria quantistica dei campi bosonici. A questo proposito consideriamo i seguenti operatori, ottenuti per quantizzazione canonica dalle funzioni a e a^* definite dalle (2.10) alla fine del paragrafo 2.1.1:

$$\begin{aligned}\hat{a} &:= \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\sqrt{m\omega}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}) \\ \hat{a}^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\sqrt{m\omega}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p})\end{aligned}$$

In perfetta analogia con quanto già detto per il caso classico (si veda (2.11)), rispetto alle due osservabili $\hat{Q}$ e $\hat{P}$ questi due operatori assumono la forma

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\omega\hbar}}(\omega\hat{Q} + i\hat{P}) \quad \text{e} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega\hbar}}(\omega\hat{Q} - i\hat{P})$$

mentre, analogamente alla (2.12), si ha che

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad \text{e} \quad \hat{P} = i\omega\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

Entrambi questi operatori $a, a^\dagger$ sono del tipo $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ed ovviamente sono tali che $\hat{a}^\dagger$ è l'aggiunto di $\hat{a}$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nella letteratura questi operatori variano largamente per ciò che riguarda la scelta della costante di moltiplicazione e dei fattori di fase; la loro importanza consiste nel loro legame con l'operatore hamiltoniano.

Proposizione 2.1.1 *Gli operatori $\hat{H}, \hat{a}, \hat{a}^\dagger$ soddisfano le relazioni*

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{H} + \frac{\hbar\omega}{2} \right) \tag{2.22}$$

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{H} - \frac{\hbar\omega}{2} \right) \tag{2.23}$$

dalle quali si ricava

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]_+ \tag{2.24}$$

$$\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = -\frac{i}{\hbar}\mathbb{I} \quad \text{ovvero} \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbb{I} \tag{2.25}$$

(Queste ultime sono l'analogo quantistico delle corrispondenti parentesi classiche (2.14) e (2.15)).

Dimostrazione. Applicando direttamente la definizione degli operatori, segue

$$\begin{aligned}
\hat{a} \circ \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{2m\omega\hbar} (m\omega\hat{x} + i\hat{p}) \circ (m\omega\hat{x} - i\hat{p}) \\
&= \frac{1}{2m\omega\hbar} (m^2\omega^2\hat{x}^2 + \hat{p}^2 - im\omega [\hat{x}, \hat{p}]) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - \frac{i\omega}{2} [\hat{x}, \hat{p}] \right) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{H} + \frac{\hbar\omega}{2} \right) \\
\hat{a}^\dagger \circ \hat{a} &= \frac{1}{2m\omega\hbar} (m\omega\hat{x} - i\hat{p}) \circ (m\omega\hat{x} + i\hat{p}) \\
&= \frac{1}{2m\omega\hbar} (m^2\omega^2\hat{x}^2 + \hat{p}^2 + im\omega [\hat{x}, \hat{p}]) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \frac{i\omega}{2} [\hat{x}, \hat{p}] \right) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{H} - \frac{\hbar\omega}{2} \right)
\end{aligned}$$

□

Dall'eguaglianza (2.23), se definiamo l'operatore (ovviamente autoaggiunto)

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

abbiamo la relazione

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.26)$$

Riassunto sugli operatori coinvolti.

Possiamo perciò compendiare i risultati ottenuti sino ad ora facendo un elenco di alcuni importanti operatori appartenenti all'algebra involutiva complessa $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ (che è l'algebra di tutti gli operatori lineari definiti su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tali che essi ed il loro aggiunto rendono stabile $\mathcal{S}(\mathbb{R})$), e più precisamente all'algebra reale $\mathcal{O}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ degli operatori hermitiani (osservabili quantistiche). Come elementi primitivi abbiamo preso in considerazione gli operatori di posizione e momento

$$\begin{aligned}
\hat{q} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{definito da} \quad \hat{q}\psi(x) = x\psi(x) \\
\hat{p} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{definito da} \quad \hat{p}\psi(x) = -i\hbar \frac{d\psi(x)}{dx}
\end{aligned}$$

che soddisfano le relazioni di commutazione canonica

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \mathbb{I}_{\mathcal{S}} \quad \text{ovvero} \quad \{\hat{q}, \hat{p}\} = \mathbb{I}_{\mathcal{S}} \quad (\text{CCR-i})$$

$$[\hat{q}, \hat{q}] = \mathbb{O}_{\mathcal{S}} \quad \text{ovvero} \quad \{\hat{q}, \hat{q}\} = \mathbb{O}_{\mathcal{S}} \quad (\text{CCR-ii})$$

$$[\hat{p}, \hat{p}] = \mathbb{O}_{\mathcal{S}} \quad \text{ovvero} \quad \{\hat{p}, \hat{p}\} = \mathbb{O}_{\mathcal{S}} \quad (\text{CCR-iii})$$

A partire da questi abbiamo costruito gli operatori

$$\hat{a}(\eta) := \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{\eta} \hat{q} + i \frac{1}{\sqrt{\eta}} \hat{p} \right) \quad (2.27a)$$

$$\hat{a}^\dagger(\eta) := \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{\eta} \hat{q} - i \frac{1}{\sqrt{\eta}} \hat{p} \right) \quad (2.27b)$$

(ove si è esplicitata la dipendenza dalla scelta del parametro positivo $\eta = m\omega = \sqrt{mk}$). Anche questi operatori sono elementi di $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$: infatti si verifica immediatamente che $\hat{a}^\dagger(\eta)$ è l'aggiunto di $\hat{a}(\eta)$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Infine, invertendo le relazioni (2.27a) e (2.27b) otteniamo l'espressione degli operatori di posizione e momento in termini di $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$:

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\eta}} (\hat{a}(\eta) + \hat{a}^\dagger(\eta)) \quad (2.28a)$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar\eta}{2}} (\hat{a}(\eta) - \hat{a}^\dagger(\eta)) \quad (2.28b)$$

Proprietà degli operatori di creazione ed annichilazione.

Considerando $\eta \in \mathbb{R}_+$ come fissato, vogliamo ora individuare alcune proprietà dei due operatori $\hat{a}(\eta)$ e $\hat{a}^\dagger(\eta)$ che, come vedremo, li caratterizzano in modo univoco. Se definiamo

$$\mathcal{D}_\eta := \{p(x)e^{-\frac{\eta}{2\hbar}x^2} : p \text{ polinomio in } x\}$$

allora è immediato verificare che $\mathcal{D}_\eta$ è una varietà lineare in $L_2(\mathbb{R})$. Poiché le funzioni di Hermite sono espresse da:

$$u_{n,\eta}(x) = \frac{1}{C_n} H_n \left(\sqrt{\frac{\eta}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{\eta}{2\hbar}x^2}$$

ove H_n è un polinomio di grado n e C_n un'opportuna costante di normalizzazione, avremo che $\{u_{n,\eta}(x) : n \in \mathbb{N}\}$, sono per $L_2(\mathbb{R})$, è contenuto in $\mathcal{D}_\eta$. Di conseguenza avremo che

$$\mathcal{D}_\eta = Sp\{u_{n,\eta} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\overline{\mathcal{D}_\eta} = L_2(\mathbb{R})$$

Proposizione 2.1.2 *Nello spazio di Hilbert complesso e separabile $L_2(\mathbb{R})$, consideriamo la restrizione a $\mathcal{D}_\eta$ degli operatori $\hat{a}(\eta)$ e $\hat{a}^\dagger(\eta)$. Valgono le proprietà:*

- (i) $\hat{a}(\mathcal{D}_\eta) \subseteq \mathcal{D}_\eta$, $\hat{a}^\dagger(\mathcal{D}_\eta) \subseteq \mathcal{D}_\eta$
- (ii) $[\hat{a}(\eta), \hat{a}^\dagger(\eta)] = \mathbb{I}_{\mathcal{D}_\eta}$
- (iii) $\langle \hat{a}(\eta)\varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \hat{a}^\dagger(\eta)\psi \rangle$ per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_\eta$
- (iv) il nucleo di $\hat{a}(\eta)$ è monodimensionale, e una sua base ortonormale è fornita dal vettore

$$u_0(x) = \sqrt[4]{\frac{\eta}{\hbar\pi}} e^{-\frac{\eta}{2\hbar}x^2} = \sqrt[4]{\frac{\eta}{\hbar\pi}} H_0\left(\sqrt{\frac{\eta}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{\eta}{2\hbar}x^2}$$

- (v) $\mathcal{D}_\eta = S_P \{(\hat{a}^\dagger)^n u_0 : n \in \mathbb{N}\}$

Dimostrazione. (i) Ricordiamo che $\hat{a}(\eta)$ e $\hat{a}^\dagger(\eta)$ sono operatori definiti tramite gli operatori $\hat{q}$ e $\hat{p}$ (vedi (2.27a) e (2.27b)) ed essendo immediato verificare che $\mathcal{D}_\eta$ è stabile rispetto a questi ultimi, ne segue che $\mathcal{D}_\eta$ è stabile anche rispetto a $\hat{a}(\eta)$, $\hat{a}^\dagger(\eta)$.

(ii) Calcolando esplicitamente il commutatore, troviamo

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\eta), \hat{a}^\dagger(\eta)] &= \hat{a}(\eta)\hat{a}^\dagger(\eta) - \hat{a}^\dagger(\eta)\hat{a}(\eta) && \text{(per (2.22) e (2.23))} \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \left[\left(\hat{H} + \frac{\hbar\omega}{2} \right) - \left(\hat{H} - \frac{\hbar\omega}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \hbar\omega = \mathbb{I} \end{aligned}$$

(iii) Questa proprietà è già stata verificata per $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, e varrà a maggior ragione nella varietà lineare $\mathcal{D}_\eta \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(iv) Siccome $\ker(\hat{a}(\eta)) = \{\psi \in \mathcal{D}_\eta : \hat{a}(\eta)\psi = \underline{0}\}$, consideriamo l'equazione

$$\hat{a}(\eta)\psi = \underline{0}$$

ovvero

$$\sqrt{\eta}x\psi(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{\eta}}\psi'(x) = 0,$$

da cui si ricava che dobbiamo individuare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$\psi'(x) + \frac{\eta}{\hbar}x\psi(x) = 0$$

sotto la condizione aggiuntiva che $\psi \in \mathcal{D}_\eta$. L'integrale generale dell'equazione differenziale in esame è

$$\psi(x) = C_1 e^{-\frac{\eta}{2\hbar}x^2} \in \mathcal{D}_\eta,$$

come si può verificare immediatamente.

(v) Dal momento che $\mathcal{D}_\eta = Sp\{u_{n,\eta} : n \in \mathbb{N}\}$, è sufficiente mostrare che

$$(\hat{a}^\dagger)^n u_0(x) = K_n u_{n,\eta}(x)$$

per ogni n , dove K_n è un opportuno fattore di proporzionalità.

Procediamo per induzione su n . Per $n = 0$ la tesi è ovviamente vera; supponiamo allora che sia vera per n . Ricordando una nota relazione di ricorrenza dei polinomi di Hermite abbiamo

$$\begin{aligned} (\hat{a}^\dagger)^{n+1} u_0(x) &= \hat{a}^\dagger [(\hat{a}^\dagger)^n u_0(x)] \\ &= \frac{K_n}{C_n} \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[\sqrt{\eta} \hat{x} - i \frac{1}{\sqrt{\eta}} \hat{p} \right] \left(H_n \left(\sqrt{\frac{\eta}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{\eta}{2\hbar} x^2} \right) \\ &= \frac{K_n}{C_n \sqrt{2}} \left[2 \sqrt{\frac{\eta}{\hbar}} x H_n \left(\sqrt{\frac{\eta}{\hbar}} x \right) - H'_n \left(\sqrt{\frac{\eta}{\hbar}} x \right) \right] e^{-\frac{\eta}{2\hbar} x^2} \\ &= \frac{K_n}{C_n \sqrt{2}} H_{n+1} \left(\sqrt{\frac{\eta}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{\eta}{2\hbar} x^2} \end{aligned}$$

e quindi $(\hat{a}^\dagger)^{n+1} u_0(x) = K_{n+1} u_{n+1,\eta}(x)$ con $K_{n+1} = (K_n C_{n+1}) / (C_n \sqrt{2})$ e la tesi è vera per $n + 1$, completando la dimostrazione. $\square$

2.2 Corda vibrante fissata ai due estremi: modi normali di oscillazione

Consideriamo una corda perfettamente elastica di massa M e di lunghezza a riposo L , fissata ad un estremo e tenuta in tensione con una forza costante di modulo F applicata al secondo dei due; supponiamo che sia libera di oscillare lungo una singola direzione trasversa. Indichiamo con $u(x, t)$ lo spostamento della corda rispetto alla posizione di equilibrio nel punto x all'istante t e con $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ la corrispondente velocità nel medesimo punto e al medesimo istante. Ponendo $\varrho = M/L$ la densità (considerata costante) per unità di lunghezza della corda, in regime di piccole oscillazioni $u(x, t)$ soddisfa l'equazione alle derivate parziali

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] u(x, t) = 0 \quad (2.29)$$

dove la costante

$$c = \sqrt{F/\varrho} \quad (2.30)$$

ha la dimensione di una velocità, intesa come velocità di propagazione di una perturbazione lungo la stringa. Esprimiamo il fatto che gli estremi della corda sono fissati, attraverso le condizioni al contorno

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \quad (2.31)$$

mentre le condizioni iniziali della corda sono espresse tramite l'assegnazione di due funzioni note $h, h_1 : [0, L] \mapsto \mathbb{R}$ della variabile x esprimenti la posizione e la velocità di ciascun punto della corda all'istante $t = 0$ tramite le condizioni

$$u(x, 0) = h(x) \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = h_1(x) \quad \text{per ogni } x \in [0, L] \quad (2.32)$$

Se richiediamo che la soluzione $u(x, t)$ della (2.29), oltre che soddisfare le condizioni al bordo che stiamo considerando, per ogni istante fissato t sia di quadrato integrabile sull'intervallo $[0, L]$, ovvero $\forall t \in \mathbb{R} \ u(x, t) \in L_2[0, L]$, allora $u(x, t)$ è scomponibile in serie di Fourier rispetto al sistema ortonormale completo (sonc) trigonometrico $\{f_n(x) := \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi}{L}x) : n = 1, 2, \dots\}$ sullo spazio di Hilbert $L_2[0, L]$. Abbiamo quindi che la soluzione può esprimersi come sviluppo in serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n(t) f_n(x) \quad (2.33)$$

Osserviamo che la forma particolare delle f_n ci assicura che le condizioni al bordo siano automaticamente soddisfatte: infatti le identità

$$f_n(0) = f_n(L) = 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

implicano necessariamente che le (2.31) sono soddisfatte, mentre i coefficienti di Fourier $q_n(t) = \langle f_n(x) | u(x, t) \rangle = \int_0^L f_n(x) u(x, t) dx$ sono delle funzioni a valori reali nella variabile temporale t da determinarsi tramite le condizioni iniziali (2.32).

Introdotte le costanti

$$k_n = \frac{\pi n}{L} \quad \text{per } n \in \mathbb{N}$$

la forma esplicita della (2.33) diviene

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{+\infty} q_n(t) \sin(k_n x) \quad (2.34)$$

La forma analitica della funzioni $q_n(t)$ si ricava sostituendo $u(x, t)$ con il suo sviluppo di Fourier (2.33) nell'equazione delle onde (2.29). Ricaviamo immediatamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \left[\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} q_n(t) + k_n^2 q_n(t) \right] = 0$$

che si riconduce, per ortogonalità delle $f_n(x)$, ad un sistema di equazioni differenziali disaccoppiate di oscillatori armonici relativamente agli incogniti coefficienti di Fourier:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_n^2 \right] q_n(t) = 0 \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

dove

$$\omega_n := \frac{n\pi}{L} c = k_n c \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \quad (2.35)$$

I coefficienti di Fourier $q_n(t)$, che evolvono quindi nel tempo come oscillatori armonici, sono dati (coerentemente colla (2.3)) da

$$q_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (2.36a)$$

con A_n e φ_n costanti d'integrazione reali. Si noti che la “velocità” corrispondente risulta essere

$$\dot{q}_n(t) = -[\omega_n A_n] \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (2.36b)$$

La soluzione della (2.29) può quindi essere espressa come

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) \quad (2.37)$$

e le costanti A_n e φ_n vengono fissate imponendo le condizioni iniziali (2.32).

Onde stazionarie e modi normali di vibrazione

Si osservi che la precedente soluzione si può anche formalizzare nel seguente modo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n(x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

ove abbiamo posto

$$\mathcal{A}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} A_n \sin(k_n x)$$

In definitiva la soluzione risulta essere, in analogia colla (2.3), una *sovrapposizione* di moti armonici “*semplici*” (anche detta *armonica* di rango n)

$$u_n(x, t) = \mathcal{A}_n(x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

usualmente chiamati *modi normali di vibrazione* ciascuno di *pulsazione* (o *frequenza angolare*) ω_n e fase φ_n costanti; mentre le ampiezze relative $\mathcal{A}_n(x)$ sono determinate dal punto x della corda, ma fissato un tale punto esse rimangono costanti nel tempo (*vibrazioni stazionarie*). Queste ampiezze sono funzioni sinusoidali che si annullano nei “*nodi*”

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{L}{n}, x_2 = \frac{2L}{n}, \dots, x_n = \frac{nL}{n} = L$$

in cui la “*lunghezza dell’onda sinusoidale*” è costante $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ e pure costante è la associata *frequenza* $\nu_n = c \frac{n}{2L}$.

Formulazione esponenziale della soluzione

Se nella soluzione (2.34) esprimiamo le funzioni sin attraverso la loro formulazione esponenziale otteniamo

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2i} q_n(t) \left[e^{ik_n x} - e^{-ik_n x} \right] \quad (2.38a)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\alpha_n(t) e^{ik_n x} + \alpha_n(t)^* e^{-ik_n x} \right] \quad (2.38b)$$

avendo posto

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) &= -\frac{i}{A_n \sqrt{\hbar L}} q_n(t) = -\frac{i}{\sqrt{\hbar L}} \cos(\omega_n t + \varphi_n) \\ \alpha_n(t)^* &= \frac{i}{A_n \sqrt{\hbar L}} q_n(t) = \frac{i}{\sqrt{\hbar L}} \cos(\omega_n t + \varphi_n) \end{aligned}$$

Se ora nella (2.38b) introduciamo i coefficienti $k_{-n} := -k_n$ per $n \in \mathbb{N}$ e poniamo $\alpha_{-n}(t) := \alpha_n(t)^*$, avremo che

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\alpha_n(t) e^{ik_n x} + \alpha_n(t)^* e^{-ik_n x} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \alpha_n(t) e^{ik_n x} \quad \text{con } A_0 = 0 \end{aligned}$$

ovvero, coll'ulteriore posizione

$$A_n(t) := \sqrt{\frac{\hbar}{2}} A_n \alpha_n(t) \in \mathbb{C} \quad \text{con } A_{-n}(t) = A_n(t)^*$$

si ottiene la forma

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n(t) e^{ik_n x} \quad \text{con } A_0(t) = 0$$

Una diversa formulazione della soluzione

Esprimiamo la soluzione (2.37) nella seguente forma equivalente

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} A_n \sin(k_n x) \left[\cos \varphi_n \cos(\omega_n t) - \sin \varphi_n \sin(\omega_n t) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[q_n(x) \cos(\omega_n t) + p_n(x) \sin(\omega_n t) \right] \end{aligned}$$

ove abbiamo posto

$$\begin{aligned} q_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \varphi_n \sin(k_n x) \\ p_n(x) &= -\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \varphi_n \sin(k_n x) \end{aligned}$$

Ora, si tenga presente che

$$\begin{aligned} &\frac{q_n + ip_n}{2} e^{-i\omega_n t} + \frac{q_n - ip_n}{2} e^{i\omega_n t} \\ &= \frac{1}{2} \left[q_n (\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t)) + ip_n (\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t)) \right. \\ &\quad \left. + q_n (\cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t)) - ip_n (\cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t)) \right] \\ &= q_n \cos(\omega_n t) + p_n \sin(\omega_n t) \end{aligned}$$

e quindi la soluzione assumerà la forma

$$u(x, t) = A_n \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{q_n(x) + ip_n(x)}{2} e^{-i\omega_n t} + \frac{q_n(x) - ip_n(x)}{2} e^{i\omega_n t} \right]$$

Adesso, introduciamo le due funzioni a valori complessi (di cui una la complessa coniugata dell'altra)

$$\begin{aligned} a_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (q_n(x) + ip_n(x)) \\ a_n^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (q_n(x) - ip_n(x)) \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} q_n(x) &= \sqrt{2\hbar} (a_n^*(x) + a_n(x)) \\ p_n(x) &= i\sqrt{2\hbar} (a_n^*(x) - a_n(x)) \end{aligned}$$

Se consideriamo la pura dipendenza funzionale $a_n(q_n, p_n) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q_n + ip_n)$ e $a_n^*(q_n, p_n) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q_n - ip_n)$, allora si ha la parentesi di Poisson che ci si aspetta per un'analogia colla (2.15):

$$\{a_n, a_n^*\} = -\frac{i}{\hbar} \mathbf{1}$$

Usando queste due nuove funzioni, la soluzione assume la forma

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n [a_n(x) e^{-i\omega_n t} + a_n^*(x) e^{i\omega_n t}] \quad (2.39)$$

con

$$\begin{aligned} a_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{L\hbar}} \sin(k_n x) [\cos \varphi_n - i \sin \varphi_n] = \frac{1}{\sqrt{L\hbar}} \sin(k_n x) e^{-i\varphi_n} \\ a_n^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{L\hbar}} \sin(k_n x) [\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n] = \frac{1}{\sqrt{L\hbar}} \sin(k_n x) e^{i\varphi_n} \end{aligned}$$

Si osservi che ponendo $E_n = \sqrt{\hbar/2} A_n$ la (2.39) assume la forma utilizzata in [3]:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n [a_n(x) e^{-i\omega_n t} + a_n^*(x) e^{i\omega_n t}]$$

Energia e coordinate normali. Consideriamo il segmento di corda compreso tra x e $x + dx$. L'angolo $\vartheta(t)$ che all'istante t questo forma con l'asse delle x è in prima approssimazione identificabile colla sua velocità

$$\tan \vartheta(t) \simeq \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

Per ottenere la lunghezza dl del segmento, bisogna ricordare che $dx = dl \cos \vartheta(t)$. Inoltre, dal momento che gli spostamenti trasversali (e quindi anche i valori dell'angolo $\vartheta(t)$) sono piccoli, per valori dell'angolo $\vartheta(t)$ nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ possiamo porre l'identificazione $\cos \vartheta(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \vartheta(t)}}$, e considerando lo sviluppo in serie di $g(x) = [1+x]^{\frac{1}{2}}$ arrestato al prim'ordine per $x = \tan^2 \vartheta(t)$, risulta essere

$$dl = \frac{dx}{\cos \vartheta(t)} = dx [1 + \tan^2 \vartheta(t)]^{\frac{1}{2}} \simeq dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Il lavoro compiuto dalla tensione nel portare il segmento di corda dalla posizione di equilibrio ($u(x) = 0$) alla configurazione in esame è il prodotto (cambiato di segno) di F per la variazione di lunghezza ($dl - dx$) del segmento di corda. Di conseguenza, l'energia potenziale associata al segmento di corda compreso tra x e $x + dx$ è

$$dV = -dL = -(-F)(dl - dx) = \frac{1}{2}F \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx$$

Ora, l'energia cinetica associata allo stesso segmento di corda (di massa $dm = \rho dx$) è $dT = \frac{1}{2}\rho \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx$. Pertanto, l'energia totale del sistema H è la somma della energia cinetica totale T e della energia potenziale totale V espressa dalla seguente identità:

$$H = T + V = \int_0^L \left\{ \frac{\rho}{2} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]^2 + \frac{F}{2} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]^2 \right\} dx$$

Sfruttando l'ortonormalità delle $f_n(x)$ abbiamo

$$\begin{aligned} T &= \int_0^L \frac{\rho}{2} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx \\ &= \sum_n \sum_{n'} \frac{\rho}{2} \left(\frac{dq_n}{dt} \right) \left(\frac{dq_{n'}}{dt} \right) \int_0^L f_n(x) f_{n'}(x) dx \\ &= \frac{\rho}{2} \sum_n \left(\frac{dq_n}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

Mentre dalla proprietà di ortogonalità (ma non normalità) delle derivate

$f'_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ e, facendo uso delle (2.30) e (2.35), si ha che

$$\begin{aligned} V &= \int_0^L \frac{F}{2} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx \\ &= \sum_n \sum_{n'} \frac{F}{2} q_n q_{n'} \left(\frac{n\pi}{L}\right) \left(\frac{n'\pi}{L}\right) \int_0^L \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n'\pi}{L}x\right) \right) dx \\ &= \frac{F}{2} \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{L^2} q_n^2 = \frac{1}{2} \sum_n \varrho c^2 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} q_n^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_n \varrho \omega^2 q_n^2 \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo ottenuto che l'energia cinetica e l'energia potenziale totale si possono esprimere in termini delle *coordinate normali* di “posizione” $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ e delle corrispondenti *coordinate normali* di “velocità” $\{\dot{q}_n : n \in \mathbb{N}\}$ attraverso le

$$T = \frac{1}{2} \sum_n \varrho \dot{q}_n^2 \quad \text{e} \quad V = \frac{1}{2} \sum_n \varrho \omega^2 q_n^2$$

Quindi, rispetto alle coordinate generalizzate (o normali) di posizione q_n e le loro corrispondenti coordinate generalizzate (o normali) di velocità $\dot{q}_n$ l'energia totale del sistema si esprime come somma

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} [\varrho \dot{q}_n^2 + \varrho \omega_n^2 q_n(t)^2]$$

Scrivendo la lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T - V$ possiamo definire i momenti canonici coniugati $p_n = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_n = \varrho \dot{q}_n$ e scrivere l'hamiltoniana per le variabili coniugate q_n e p_n :

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{p_n^2}{\varrho} + \varrho \omega_n^2 q_n^2 \right]$$

In questo modo abbiamo descritto il sistema come un insieme discreto di oscillatori armonici indipendenti (nel senso che le variabili normali sono disaccoppiate), ciascuno dei quali è governato dall'hamiltoniana

$$H_n = \frac{1}{2} \left[\frac{p_n^2}{\varrho} + \varrho \omega_n^2 q_n^2 \right]$$

per cui l'energia totale è

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$$

Una volta fissato un modo normale di oscillazione indicizzato da n se, in analogia con quanto fatto nel paragrafo 2.1.1 nel caso dell'oscillatore armonico monodimensionale, introduciamo le osservabili ausiliarie

$$Q_n = \sqrt{\varrho} q_n \quad P_n = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} p_n$$

per le quali valgono le regole di commutazione

$$\{Q_n, P_{n'}\} = \delta_{nn'}$$

la energia corrispondente al fissato n modo può essere espresso nella forma

$$H_n = \frac{1}{2} [P_n^2 + \omega_n^2 Q_n^2] \quad (2.40)$$

Se ora definiamo le funzioni a valori complessi (una la complessa coniugata dell'altra)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\varrho\omega_n\hbar}} (\varrho\omega_n q_n + ip_n) \quad a_n^* = \frac{1}{\sqrt{2\varrho\omega_n\hbar}} (\varrho\omega_n q_n - ip_n)$$

allora abbiamo che

$$H_n = \hbar\omega_n (a_n^* a_n) \quad (2.41)$$

e

$$\{a_n, a_{n'}^*\} = -\frac{i}{\hbar} \delta_{nn'} \quad (???) \quad (2.42)$$

Confrontando questi risultati con (2.9), (2.14) e (2.15) possiamo concludere che il problema in esame è stato ricondotto, attraverso un'opportuna trasformazione canonica, a una serie infinita di oscillatori armonici disaccoppiati, a ciascuno dei quali possiamo applicare tutte le considerazioni fatte nei paragrafi 2.1.2 e 2.1.3.

Diamo ora la forma analitica delle funzioni a_n, a_n^* che, tenuto conto delle forme esplicite delle coordinate normali q_n e $p_n = \varrho\dot{q}_n$ ottenibili dalle (2.36a) e (2.36b), si esprimono secondo la dipendenza temporale

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\varrho\omega_n\hbar}} [\varrho\omega_n A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) - i\varrho\omega_n A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)] \\ &= \sqrt{\frac{\varrho\omega_n}{2\hbar}} A_n [\cos(\omega_n t + \varphi_n) - i \sin(\omega_n t + \varphi_n)] \end{aligned}$$

ovvero, in perfetta analogia con le (2.16) per l'oscillatore armonico monodimensionale,

$$a_n(t) = \sqrt{\frac{\varrho\omega_n}{2\hbar}} A_n e^{-i(\omega_n t + \varphi_n)} \quad (2.43a)$$

$$a_n^*(t) = \sqrt{\frac{\varrho\omega_n}{2\hbar}} A_n e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} \quad (2.43b)$$

Sonc e condizioni al contorno

Sottolineiamo ancora una volta il fatto che il sonc trigonometrico utilizzato per lo sviluppo (2.33) è stato la scelta più naturale possibile. Infatti, in generale, date le condizioni al bordo (2.31) e le condizioni iniziali (2.32), cercando soluzioni all'equazione delle onde 2.29 nella forma

$$u(x, t) = T(t)X(x) \quad (2.44)$$

e sostituendo in 2.29, otteniamo

$$X(x)T''(t) = c^2T(t)X''(x)$$

da cui

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Nel primo membro di questa equazione abbiamo una funzione che dipende soltanto da t , e nel secondo membro una funzione che dipende soltanto da x . L'eguaglianza è possibile solo nel caso in cui entrambi i termini sono uguali a una certa costante, che indichiamo con $-k^2$ (dove $k \in \mathbb{C}$):

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2$$

Di conseguenza, valgono le due equazioni

$$\begin{aligned} X''(x) + k^2X(x) &= 0 \\ T''(t) + c^2k^2T(t) &= 0 \end{aligned}$$

le cui soluzioni generali per $k \neq 0$ sono

$$\begin{aligned} X(x) &= Ce^{ikx} + De^{-ikx} \\ T(t) &= Ae^{ickt} + Be^{-ickt} \end{aligned}$$

dove A, B, C e D sono costanti arbitrarie. La soluzione (2.44), dunque, si riscrive

$$u(x, t) = (Ae^{ikt} + Be^{-ikt})(Ce^{ikx} + De^{-ikx}) \quad (2.45)$$

A questo punto imponiamo le condizioni al contorno (2.31): richiediamo cioè che $u(x, t)$ si annulli (per ogni valore di t) per $x = 0$ e per $x = L$. Formulando questa richiesta in termini della forma di u appena trovata, per cui

$$X(0) = C + D \quad (2.46a)$$

$$X(L) = Ce^{ikL} + De^{-ikL} \quad (2.46b)$$

Scartando la soluzione banale $C = D = 0$ abbiamo

$$D = -C \quad (2.47a)$$

$$\sin(kL) = 0 \quad (2.47b)$$

La (2.47a) implica che, a meno di ridefinire la costante arbitraria C ,

$$X(x) = C \sin(kx)$$

La (2.47b), invece, definisce il parametro k , che fino a ora consideravamo arbitrario. Le soluzioni sono

$$k = \pm \frac{n\pi}{L} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.48)$$

e, in particolare, $k \in \mathbb{R}$. D'altra parte, fissato n la soluzione $u(x, t) = X(x)T(t)$ corrispondente a $k = (n\pi)/L$ differisce da quella corrispondente a $k = (-n\pi)/L$ solamente per un segno, e quindi (per l'arbitrarietà di C) queste due soluzioni devono essere considerate identiche. È dunque sufficiente considerare soltanto i k *positivi* ottenuti in 2.48. In definitiva, se definiamo $\omega_k := kc \in \mathbb{R}^+$ e scriviamo A al posto di AC e B al posto di BC , la 2.45 diventa

$$u(x, t) = (Ae^{i\omega_k t} + Be^{-i\omega_k t}) \sin(kx)$$

oppure, sostituendo ω_k con il suo generico valore $(n\pi c)/L$, corrispondente all'intero n ,

$$u_n(x, t) = [A_n e^{i\frac{n\pi c}{L}t} + B_n e^{-i\frac{n\pi c}{L}t}] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n \in \mathbb{N}$$

Vediamo così che il sonc di $L_2[0, L]$ che meglio si presta alla scrittura di soluzioni fattorizzate soddisfacenti le condizioni al contorno (2.31) è proprio quello scelto all'inizio di questa sezione:

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Un diverso insieme di condizioni al contorno. Se invece di (2.31) considerassimo le condizioni al contorno

$$u(0, t) = u(L, t) \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}$$

troveremmo che le frequenze tipiche del sistema differirebbero per un fattore 2 da quelle del caso precedente. Infatti, imponendo queste condizioni, le (2.46) implicano immediatamente

$$k = \pm \frac{2n\pi}{L} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.49)$$

da confrontarsi con la (2.48). In questo caso, la parte spaziale $X(x)$ della soluzione generale $u(x, t)$ non assume spontaneamente (a differenza del caso precedente) una forma diversa da quella che avevamo considerato inizialmente. Di conseguenza, possiamo ritenere che un sonc ragionevole su cui sviluppare le soluzioni sia quello esponenziale per $L_2[0, L]$:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Soluzioni sviluppate in serie esponenziale di Fourier

Prendiamo ora in esame il sonc esponenziale di Fourier in $L_2[0, L]$ nella forma $\{e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n \frac{x}{L}} : n \in \mathbb{Z}\}$, il quale soddisfa ovviamente le condizioni al contorno

$$e_n(0) = e_n(L) = \frac{1}{\sqrt{L}} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}$$

La soluzione (a valori reali) $u(x, t)$ dell'equazione delle onde monodimensionali (2.29) sarà esprimibile come sviluppo in serie:

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n^c(t) e_n(x)$$

ove in questo caso gli incogniti coefficienti di Fourier $q^c(t) = \int_0^L \overline{e_n(x)} u(x, t) dx$ sono ora delle funzioni a valori complessi nella variabile temporale t . Per un fissato intero naturale $n \in \mathbb{N}$, osservato che $e_{-n}(x) = \overline{e_n(x)}$ e ricordato che $u(x, t) \in \mathbb{R}$, si ha che

$$q_{-n}^c(x) = [q_n^c(x)]^* \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \quad (2.50)$$

Infatti

$$\begin{aligned} q_{-n}^c(x) &= \int \overline{e_{-n}(x)} u(x, t) dx = \int e_n(x) u(x, t) dx \\ &= \overline{\int \overline{e_n(x)} u(x, t) dx} = \overline{q_n^c(x)} \end{aligned}$$

Si osservi che ponendo

$$k_n = \frac{2\pi}{L} n \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}$$

la forma completa della soluzione diviene

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n^c(t) e^{ik_n x} \quad (2.51)$$

Come grandezze fisiche, i coefficienti k_n sono quantità necesariamente maggiori di zero. Ciò porterebbe a considerare nella $u(x, t)$ soltanto i termini corrispondenti alla sommatoria per $n \geq 0$. Una maniera per ovviare a tale difficoltà consiste nello scrivere lo sviluppo in serie come una sommatoria in cui l'indice n varia secondo gli interi non negativi:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} q_0^c(t) + \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [q_n^c(t) e^{ik_n x} + q_{-n}^c(t) e^{ik_{-n} x}]$$

Ma essendo $k_{-n} = -n \frac{2\pi c}{L} = -k_n$ si ha che

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} q_0^c(t) + \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [q_n^c(t) e^{ik_n x} + q_n^c(t)^* e^{-ik_n x}]$$

Se, come nel caso precedentemente trattato del sonc di soli seni, anche nel presente caso del sonc esponenziale si sostituisce la soluzione nella forma (2.51) nell'equazione delle onde (2.29) si ottiene l'identità

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(x) \left[\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} q_n^c(t) + k_n^2 q_n^c(t) \right] = 0$$

Questa identità si riconduce, per ortogonalità delle $e_n(x)$, ad un sistema di equazioni differenziali disaccoppiate di oscillatori armonici relativamente agli incogniti coefficienti di Fourier complessi:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_n^2 \right] q_n^c(t) = 0 \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}$$

dove

$$\omega_n := k_n c = \frac{2\pi c}{L} n \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}$$

I coefficienti di Fourier complessi sono quindi dati da

$$q_n^c(t) = A_n e^{-i(\omega_n t + \varphi_n)} = A_n^c e^{-i\omega_n t} \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}$$

in cui abbiamo inglobato nelle costanti complesse $A_n^c = A_n e^{-i\varphi_n} \in \mathbb{C}$ anche il termine di fase. La soluzione (reale) della (2.29) può essere quindi espressa come

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^c e^{-i\omega_n t} e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^c e^{-i(\omega_n t - k_n x)} \quad (2.52)$$

ovvero

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^c e^{i(k_n x - \omega_n t)}$$

dove le costanti complesse A_n^c vengono fissate attraverso opportune condizioni iniziali.

I coefficienti di Fourier $q_n^c(t)$ sono indicizzati da un intero relativo $n \in \mathbb{Z}$, ma tenuto conto del legame fra i coefficienti negativi e quelli positivi espressi dalla (2.50) possiamo dividere questi coefficienti di Fourier nei seguenti due casi, entrambi indicizzati da un intero naturale:

$$\begin{aligned} q_n^c(t) &= A_n e^{-i(\omega_n t + \varphi_n)} & \text{per } n \in \mathbb{N} \\ q_{-n}^c(t) &= A_n e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} & \text{per } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Facciamo osservare che usando la (2.43) otteniamo che questi coefficienti di Fourier si possono esprimere nella forma

$$\begin{aligned} q_n^c(t) &= \sqrt{\frac{2\hbar}{\varrho \omega_n}} a_n(t) \quad \text{per } n \in \mathbb{N} \\ q_{-n}^c(t) &= \sqrt{\frac{2\hbar}{\varrho \omega_n}} a_n^*(t) \quad \text{per } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Tenuto conto di tutti questi risultati otteniamo la seguente formulazione della soluzione

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2\hbar}{L \varrho \omega_n}} \left[a_n(t) e^{ik_n x} + a_n^*(t) e^{-ik_n x} \right] \quad (2.53)$$

2.3 Modi normali di oscillazione e quantizzazione canonica del campo elettromagnetico in una cavità

Consideriamo il campo elettromagnetico in assenza di cariche in un volume finito V , delimitato da un parallelepipedo di lati A, B e C che costituisce una *cavità*. Il potenziale vettore $\vec{A}(\vec{r}, t)$, che descrive il campo al variare della posizione $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ e del tempo $t \in \mathbb{R}$, può essere espresso nel suo sviluppo in serie di Fourier per ogni fissato istante t sotto l'ipotesi che a ciascun istante la funzione sia a quadrato integrabile rispetto alla sola variabile di posizione: $\vec{A}_t(\vec{r}) := \vec{A}(\vec{r}, t) \in L_2(\mathbb{R}^3)$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (2.54)$$

Poiché $\vec{A}$ è reale, allora $\vec{A}_{-\vec{k}}(t) = \vec{A}_{\vec{k}}^*(t)$, qualunque sia t . Se ci poniamo nel gauge di Coulomb, l'ulteriore condizione $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ viene espressa nello spazio reciproco come $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$ (il potenziale vettore è sempre perpendicolare al vettore di propagazione $\vec{k}$).

Il potenziale vettore soddisfa l'equazione delle onde,

$$\partial_t^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - c^2 \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.55)$$

da cui si ricava che i singoli coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier evolvono nel tempo secondo l'equazione

$$\ddot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t) + c^2 k^2 \vec{A}_{\vec{k}}(t) = 0$$

Le condizioni al contorno fanno sì che i vettori d'onda della scomposizione, $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \in \mathbb{R}^3$, possano assumere soltanto i valori

$$k_x = \frac{2\pi}{A} n_x \quad k_y = \frac{2\pi}{B} n_y \quad k_z = \frac{2\pi}{C} n_z, \quad \text{con } n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$$

Le componenti del campo elettrico e magnetico si ottengono dalle relazioni

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}} = -\frac{1}{c} \sum_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = -\frac{1}{c} \sum_{\vec{k}} i c k \vec{A}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ \vec{H} &= \nabla \times \vec{A} = i \sum_{\vec{k}} \vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \end{aligned}$$

L'energia immagazzinata dal campo elettromagnetico è

$$H = \frac{1}{8\pi} \int |E|^2 + |H|^2 d^3r \quad (2.56)$$

e se ricordiamo che

$$\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} d^3r = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} V$$

possiamo esprimere questa quantità come una funzione semplice delle componenti del potenziale vettore: infatti

$$\begin{aligned} \int |\vec{E}|^2 d^3r &= \int \frac{1}{c^2} \left[\sum_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \left[\sum_{\vec{k}'} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}'}^* e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \right] d^3r \\ &= \frac{1}{c^2} \int \sum_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}}^* d^3r = V \sum_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}}^* \\ \int |\vec{H}|^2 d^3r &= \int \left[\sum_{\vec{k}} \vec{k} \wedge \vec{A}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \left[\sum_{\vec{k}'} \vec{k}' \wedge \vec{A}_{\vec{k}'}^* e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \right] d^3r = \int \sum_{\vec{k}} |\vec{k} \wedge \vec{A}_{\vec{k}}|^2 d^3r \\ &= V \sum_{\vec{k}} \left[\left(|\vec{k}|^2 |\vec{A}_{\vec{k}}|^2 \right) - |\vec{k} \cdot \vec{A}_{\vec{k}}|^2 \right] = V \sum_{\vec{k}} k^2 \vec{A}_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}}^* \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio ci siamo serviti del fatto che $\vec{k} \cdot \vec{A}_{\vec{k}} = 0$. Sostituendo queste espressioni in (2.56), l'energia diventa

$$H = \frac{V}{8\pi c^2} \sum_{\vec{k}} \left[\dot{\vec{A}}_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}}^* + k^2 c^2 \vec{A}_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}}^* \right]$$

Esprimiamo adesso $\vec{A}$ come somma di onde piane progressive:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \left[\vec{b}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{b}_{\vec{k}}^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \quad , \quad \text{con } \vec{b}_{\vec{k}}(t) \propto e^{-ickt}. \quad (2.57)$$

Infatti confrontando con la (2.54) ricaviamo

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \vec{b}_{\vec{k}} + \vec{b}_{-\vec{k}}^*$$

e la (2.55) è equivalente a

$$\ddot{\vec{b}}_{\vec{k}} + \ddot{\vec{b}}_{-\vec{k}}^* + c^2 k^2 (\vec{b}_{\vec{k}} + \vec{b}_{-\vec{k}}^*) = 0$$

che è chiaramente soddisfatta per $\vec{b}_{\vec{k}}(t) \propto e^{\pm i\omega_k t}$, $\omega_k := ck$. La scelta del segno meno fa sì che ciascun termine in (2.57) sia funzione soltanto di $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)$, rappresentando così un'onda progressiva nella direzione di $\vec{k}$. Per inciso, osserviamo che ciascuna di queste onde è reale (come $\vec{A}$). A questo punto possiamo scrivere

$$\dot{\vec{A}}_{\vec{k}} = -i\omega_k (\vec{b}_{\vec{k}} - \vec{b}_{-\vec{k}}^*)$$

e quindi

$$\dot{\vec{A}}_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}}^* + k^2 c^2 \vec{A}_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}}^* = 2c^2 k^2 \left(\vec{b}_{-\vec{k}}^* \vec{b}_{-\vec{k}} + \vec{b}_{\vec{k}}^* \vec{b}_{\vec{k}} \right)$$

Di conseguenza, avendo l'accortezza di rinominare l'indice della risultante serie in $-\vec{k}$ possiamo scrivere

$$H_{\vec{k}} = \frac{k^2 V}{2\pi} \vec{b}_{\vec{k}} \vec{b}_{\vec{k}}^*$$

$$H = \sum_{\vec{k}} H_{\vec{k}}$$

In questo modo abbiamo espresso l'energia del campo come somma delle energie $H_{\vec{k}}$, corrispondenti alle singole onde piane progressive.

A questo punto operiamo un riscaldamento definendo

$$\vec{a}_{\vec{k}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega_k}{\hbar} \frac{V}{2\pi}} \vec{b}_{\vec{k}} \quad (2.58)$$

$$\vec{a}_{\vec{k}}^* = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega_k}{\hbar} \frac{V}{2\pi}} \vec{b}_{\vec{k}}^* \quad (2.59)$$

e vediamo subito che allora

$$H_{\vec{k}} = \hbar \omega_k \left(\vec{a}_{\vec{k}}^* \vec{a}_{\vec{k}} \right) \quad (2.60)$$

analogamente a (2.24). Introduciamo quindi le “variabili canoniche”

$$\vec{Q}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (\vec{a}_{\vec{k}} + \vec{a}_{\vec{k}}^*)$$

$$\vec{P}_{\vec{k}} = -i\omega_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (\vec{a}_{\vec{k}} - \vec{a}_{\vec{k}}^*) = \dot{\vec{Q}}_{\vec{k}}$$

rispetto alle quali le funzioni $\vec{a}$ sono date da

$$\vec{a}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k \hbar}} \left(\omega_k \vec{Q}_{\vec{k}} + i \vec{P}_{\vec{k}} \right)$$

$$\vec{a}_{\vec{k}}^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k \hbar}} \left(\omega_k \vec{Q}_{\vec{k}} - i \vec{P}_{\vec{k}} \right)$$

L'hamiltoniana del campo si ottiene esprimendo l'energia in termini di $\vec{P}_{\vec{k}}$ e $\vec{Q}_{\vec{k}}$:

$$H = \sum_{\vec{k}} H_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \left(\vec{P}_{\vec{k}}^2 + \omega_k^2 \vec{Q}_{\vec{k}}^2 \right)$$

Notiamo che le equazioni di Hamilton $\partial H / \partial \vec{P}_{\vec{k}} = \dot{\vec{Q}}_{\vec{k}}$ coincidono, grazie alla particolare scelta dei coefficienti nella definizione di $\vec{P}_{\vec{k}}$ e $\vec{Q}_{\vec{k}}$, con le identità $\vec{P}_{\vec{k}} = \dot{\vec{Q}}_{\vec{k}}$. Le equazioni $\partial H / \partial \vec{Q}_{\vec{k}} = -\dot{\vec{P}}_{\vec{k}}$, invece, portano a

$$\ddot{\vec{Q}}_{\vec{k}} + \omega_k^2 \vec{Q}_{\vec{k}} = 0$$

che, ricordando le proprietà delle funzioni $\vec{a}$, vediamo subito essere equivalenti alle equazioni del campo (2.55).

Ricordiamo che $\vec{Q}_{\vec{k}}$ e $\vec{P}_{\vec{k}}$, la cui direzione caratterizza la polarizzazione dell'onda progressiva che ha $\vec{k}$ come vettore d'onda, sono perpendicolari a $\vec{k}$, e quindi hanno solo due componenti indipendenti. Indicando le due componenti di $\vec{Q}_{\vec{k}}$ nel piano perpendicolare a $\vec{k}$ con $Q_{\vec{k}j}$, $j = 1, 2$, otteniamo $\vec{Q}_{\vec{k}}^2 = \sum_j Q_{\vec{k}j}^2$ (e la stessa cosa vale per $\vec{P}_{\vec{k}}$). Allora

$$H_{\vec{k}j} = \frac{1}{2} \left(P_{\vec{k}j}^2 + \omega_k^2 Q_{\vec{k}j}^2 \right) \quad (2.61)$$

$$H = \sum_{\vec{k}, j} H_{\vec{k}j} \quad (2.62)$$

e l'hamiltoniana si scompone nella somma di termini indipendenti che contengono soltanto una coppia $Q_{\vec{k}j}, P_{\vec{k}j}$. Ciascuno di questi termini corrisponde ad una onda progressiva (detta *modo di oscillazione del campo*) con un certo vettore d'onda e una certa polarizzazione, e $H_{\vec{k}j}$ ha la forma (2.9) dell'hamiltoniana di un oscillatore armonico.

Consideriamo ora le funzioni componenti dei campi $\vec{a}_{\vec{k}}$ e $\vec{a}_{\vec{k}}^*$, definite in modo ovvio in termini di $Q_{\vec{k}j}$ e $P_{\vec{k}j}$. Vediamo subito che

$$H_{\vec{k}j} = \hbar \omega \left(a_{\vec{k}j} \cdot a_{\vec{k}j}^* \right) \quad (2.63)$$

Inoltre, calcolandone le parentesi di Poisson, verifichiamo immediatamente che

$$\begin{aligned} \left\{ a_{\vec{k}j}, a_{\vec{k}'j'}^* \right\} &= -\frac{i}{\hbar} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{jj'} \\ \left\{ a_{\vec{k}j}, a_{\vec{k}'j'} \right\} &= \left\{ a_{\vec{k}j}^*, a_{\vec{k}'j'}^* \right\} = 0 \end{aligned}$$

Se confrontiamo questi risultati con (2.14) e (2.15), osserviamo che l'analogia tra modi di oscillazione del campo elettromagnetico, modi della corda vibrante e oscillatore armonico classico è completa.

Quantizzazione. Il meccanismo della quantizzazione canonica porta a promuovere ad operatori le funzioni $a_{\vec{k}j}$ e $a_{\vec{k}j}^*$, facendo corrispondere la loro parentesi di Poisson quantistica con quella classica. Si ottengono così gli

operatori di creazione ed annichilazione $\hat{a}_{\vec{k}j}$ e $\hat{a}_{\vec{k}j}^\dagger$ che soddisfano le relazioni di commutazione

$$\begin{aligned}\left[\hat{a}_{\vec{k}j}, \hat{a}_{\vec{k}'j'}^\dagger\right] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{j,j'} \\ \left[\hat{a}_{\vec{k}j}, \hat{a}_{\vec{k}'j'}\right] &= \left[\hat{a}_{\vec{k}j}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'j'}^\dagger\right] = 0\end{aligned}$$

A partire da questi, poi, con le procedure descritte nel paragrafo 2.1.2 si costruiscono le corrispondenti quantistiche di tutte le osservabili finora introdotte. Ad esempio, dalla (2.63) abbiamo

$$\hat{H}_{\vec{k}j} = \frac{\hbar\omega}{2}[\hat{a}_{\vec{k}j}, \hat{a}_{\vec{k}j}^\dagger]_+ \quad (2.64)$$

da confrontarsi con (2.24).

Capitolo 3

Relazioni di commutazione canoniche secondo Fock

3.1 Proprietà generali

In questa sezione, procedendo in maniera astratta, studieremo le caratteristiche degli operatori che godono delle proprietà dimostrate nella proposizione 2.1.2 per gli operatori di creazione ed annichilazione, indipendentemente dalla loro realizzazione concreta nello spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R})$.

Definizione 3.1.1 *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert astratto qualsiasi, purché complesso e separabile. Chiameremo realizzazione secondo Fock delle relazioni di commutazione canoniche (CCR dall'acronimo inglese) su $\mathcal{H}$ una coppia di operatori*

$$\hat{a} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H} \quad e \quad \hat{a}^\dagger : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H},$$

definita su una varietà $\mathcal{D}$ densa in $\mathcal{H}$ e soddisfacente le condizioni:

- (i) $\hat{a}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$, $\hat{a}^\dagger(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$
- (ii) $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbb{I}_{\mathcal{D}}$
- (iii) $\langle \hat{a}\psi | \varphi \rangle = \langle \psi | \hat{a}^\dagger \varphi \rangle$ per ogni $\psi, \varphi \in \mathcal{D}$
- (iv) esiste un vettore $u_0 \in \mathcal{D}$ tale che $\|u_0\| = 1$ e $\hat{a}u_0 = \underline{0}$
- (v) $\mathcal{D} = S_P \{(\hat{a}^\dagger)^n u_0 : n \in \mathbb{N}\}$

Basandoci su questa definizione, introduciamo subito un operatore (ovviamente hermitiano) che nel seguito si dimostrerà molto utile:

$$\hat{N} := \hat{a}^\dagger \hat{a} \tag{3.1}$$

Introduciamo anche un parametro reale costante $\omega > 0$, e definiamo un operatore hermitiano appartenente all'algebra delle osservabili $\mathcal{O}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$:

$$\hat{H} := \frac{\hbar\omega}{2} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]_+ \tag{3.2}$$

Infine, fissiamo un ulteriore parametro reale $\eta > 0$. Possiamo quindi definire altri due operatori:

$$\hat{x}(\eta) := \sqrt{\frac{\hbar}{2\eta}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.3)$$

$$\hat{p}(\eta) := -i\sqrt{\frac{\hbar\eta}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (3.4)$$

Proposizione 3.1.2 *Gli operatori $\hat{x}(\eta)$ e $\hat{p}(\eta)$ ora introdotti soddisfano le regole di commutazione canoniche:*

$$[\hat{x}(\eta), \hat{p}(\eta)] = i\hbar\mathbb{I} \quad (3.5)$$

$$[\hat{x}(\eta), \hat{x}(\eta)] = \mathbb{O} \quad (3.6)$$

$$[\hat{p}(\eta), \hat{p}(\eta)] = \mathbb{O} \quad (3.7)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} [\hat{x}(\eta), \hat{p}(\eta)] &= -i\sqrt{\frac{\hbar}{2\eta}}\sqrt{\frac{\hbar\eta}{2}}[\hat{a} + \hat{a}^\dagger, \hat{a} - \hat{a}^\dagger] \\ &= -i\frac{\hbar}{2}\left\{[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] - [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\right\} = i\hbar[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = i\hbar\mathbb{I} \end{aligned}$$

□

Notiamo che, se definiamo $m := \eta/\omega$, possiamo scrivere l'hamiltoniana (3.2) come dipendente esplicitamente da questo parametro secondo l'identità (in cui evidenziamo la dipendenza dell'operatore dalla scelta dei parametri costanti η e m):

$$\hat{H}(\eta, m) = \frac{1}{2m} [\hat{p}^2(\eta) + \eta\hat{x}^2(\eta)]$$

inoltre, nel seguito ci sarà comodo considerare anche una “variante” di $\hat{H}$ che dipende esplicitamente dalla sola costante η :

$$\hat{H}_0(\eta) := 2m\hat{H}(\eta) = \hat{p}^2(\eta) + \eta\hat{x}^2(\eta)$$

Osservazione 3.1.3 Dato che ω e η saranno sempre fissati, da ora in avanti non riporteremo più in maniera esplicita la dipendenza da essi dei vari operatori.

Fatte queste definizioni, notiamo subito che

$$\hat{N} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{H}_0}{\eta\hbar} - \mathbb{I}\right) \quad (3.8)$$

Infatti, utilizzando (3.3) e (3.4) abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{H}_0}{\eta \hbar} - \mathbb{I} \right) &= \frac{1}{2\hbar} \left(\frac{\hat{p}^2}{\eta} + \eta \hat{x}^2 - \hbar \mathbb{I} \right) \\
&= \frac{1}{2\hbar} \left(-\frac{\hbar \eta}{2\eta} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 + \eta \frac{\hbar}{2\eta} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - \hbar \mathbb{I} \right) \\
&= -\frac{1}{4} \left(\hat{a}^2 - \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(\hat{a}^2 + \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2 \right) - \frac{\mathbb{I}}{2} \\
&= \frac{1}{2} (\hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}) - \frac{\mathbb{I}}{2} \\
&= \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \mathbb{I} + \hat{a}^\dagger \hat{a}) - \frac{\mathbb{I}}{2} \\
&= \hat{a}^\dagger \hat{a}.
\end{aligned}$$

Notiamo anche che, invertendo la relazione appena dimostrata, otteniamo

$$\hat{H}_0 = \eta \hbar (2\hat{N} + \mathbb{I}) = \eta \hbar (2\hat{a}^\dagger \hat{a} + \mathbb{I})$$

Possiamo quindi procedere allo studio più approfondito di alcune proprietà degli operatori fin qui introdotti.

Proposizione 3.1.4 *Valgono le seguenti regole di commutazione:*

- (i) $[\hat{H}_0, (\hat{a}^\dagger)^j] = 2j\eta\hbar(\hat{a}^\dagger)^j$
- (ii) $[\hat{H}_0, (\hat{a})^j] = (-1)^j 2j\eta\hbar(\hat{a})^j$

Dimostrazione. (i) Procediamo per induzione su j . Se $j = 1$,

$$\begin{aligned}
[\hat{H}_0, \hat{a}^\dagger] &= \hat{H}_0 \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{H}_0 \\
&= \eta \hbar (2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger + \mathbb{I} \hat{a}^\dagger - 2\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \mathbb{I}) \\
&= 2\eta \hbar \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 2\eta \hbar \hat{a}^\dagger
\end{aligned}$$

ove l'ultima uguaglianza discende dalla (ii) della definizione 3.1.1. Dimostrato che la (i) è vera per $j = 1$, verifichiamo che se è vera per $j - 1$ allora lo è anche per j .

$$\begin{aligned}
[\hat{H}_0, (\hat{a}^\dagger)^j] &= \hat{H}_0 (\hat{a}^\dagger)^j - (\hat{a}^\dagger)^j \hat{H}_0 \\
&= \hat{H}_0 \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger)^{j-1} - \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger)^{j-1} \hat{H}_0 \\
&= \text{per la relazione appena dimostrata} \\
&= \hat{a}^\dagger \hat{H} (\hat{a}^\dagger)^{j-1} + 2\eta \hbar \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger)^{j-1} - \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger)^{j-1} \hat{H}_0 \\
&= \hat{a}^\dagger [\hat{H}, (\hat{a}^\dagger)^{j-1}] + 2\eta \hbar (\hat{a}^\dagger)^j \\
&= \hat{a}^\dagger \{2(j-1)\eta \hbar (\hat{a}^\dagger)^{j-1}\} + 2\eta \hbar (\hat{a}^\dagger)^j \\
&= 2(j-1)\eta \hbar (\hat{a}^\dagger)^j + 2\eta \hbar (\hat{a}^\dagger)^j = 2j\eta \hbar (\hat{a}^\dagger)^j
\end{aligned}$$

(ii) La dimostrazione è del tutto analoga al caso precedente. $\square$

Proposizione 3.1.5 *Valgono le seguenti regole di commutazione:*

- (i) $[\hat{N}, (\hat{a}^\dagger)^j] = j (\hat{a}^\dagger)^j$
- (ii) $[\hat{N}, (\hat{a})^j] = (-1)^j j (\hat{a})^j$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} [\hat{N}, (\hat{a}^\dagger)^j] &= \left[\frac{1}{2\hbar\eta} (\hat{H}_0 - \eta\hbar I), (\hat{a}^\dagger)^j \right] \\ &= \frac{1}{2\hbar\eta} \{ \hat{H}_0 (\hat{a}^\dagger)^j - \eta\hbar (\hat{a}^\dagger)^j - (\hat{a}^\dagger)^j \hat{H}_0 + \eta\hbar (\hat{a}^\dagger)^j \} \\ &= \frac{1}{2\hbar\eta} [\hat{H}_0, (\hat{a}^\dagger)^j] \end{aligned}$$

E analogamente si procede per la (ii). □

Proposizione 3.1.6 *La famiglia*

$$\left\{ (\hat{a}^\dagger)^n u_0 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

soddisfa le seguenti proprietà:

- (i) $\langle (\hat{a}^\dagger)^j u_0 | (\hat{a}^\dagger)^l u_0 \rangle = j! \delta_{jl} \quad j, l = 0, 1, 2, \dots$
- (ii) $\| (\hat{a}^\dagger)^n u_0 \| = \sqrt{n!}$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \langle (\hat{a}^\dagger)^j u_0 | (\hat{a}^\dagger)^l u_0 \rangle &= \langle \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^j u_0 | (\hat{a}^\dagger)^{l-1} u_0 \rangle \\ &= \langle \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^j u_0 | (\hat{a}^\dagger)^{l-1} u_0 \rangle - \langle (\hat{a}^\dagger)^j \hat{a} u_0 | (\hat{a}^\dagger)^{l-1} u_0 \rangle \\ &= \langle [\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^j] u_0 | (\hat{a}^\dagger)^{l-1} u_0 \rangle \end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned} [\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^j] &= \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^j - (\hat{a}^\dagger)^j \hat{a} \\ &= \hat{a} \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger)^{j-1} - (\hat{a}^\dagger)^{j-1} \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &= \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^{j-1} + I (\hat{a}^\dagger)^{j-1} - (\hat{a}^\dagger)^{j-1} \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &= \frac{1}{\eta} [\hat{N}, (\hat{a}^\dagger)^{j-1}] + (\hat{a}^\dagger)^{j-1} = (j-1) (\hat{a}^\dagger)^{j-1} + (\hat{a}^\dagger)^{j-1} \\ &= j (\hat{a}^\dagger)^{j-1} \end{aligned} \tag{3.9}$$

pertanto

$$\langle (\hat{a}^\dagger)^j u_0 | (\hat{a}^\dagger)^l u_0 \rangle = j \langle (\hat{a}^\dagger)^{j-1} u_0 | (\hat{a}^\dagger)^{l-1} u_0 \rangle \tag{3.10}$$

Consideriamo ora separatamente i casi $j = l$ e $j \neq l$. Nel primo caso la (3.10) si riduce a

$$\left\| (\hat{a}^\dagger)^j u_0 \right\|^2 = j \left\| (\hat{a}^\dagger)^{j-1} u_0 \right\|^2$$

e perciò, procedendo in questa maniera, dopo j passaggi otteniamo

$$\left\| (\hat{a}^\dagger)^j u_0 \right\|^2 = (j!) \|u_0\|^2 = j!$$

da cui deduciamo immediatamente (ii).

Nel caso $j \neq l$, se $j > l$ dopo l passaggi arriviamo ad un termine $\langle (\hat{a}^\dagger)^{j-l} u_0 | u_0 \rangle$, mentre se $l > j$ dopo j passaggi arriviamo ad un termine $\langle u_0 | (\hat{a}^\dagger)^{l-j} u_0 \rangle$. In entrambi i casi, nel secondo membro della (3.10) avremo a che fare con un termine del tipo $\langle (\hat{a}^\dagger)^k u_0 | u_0 \rangle$ con $k \geq 1$. Ma

$$\langle (\hat{a}^\dagger)^k u_0 | u_0 \rangle = \langle (\hat{a}^\dagger)^{k-1} u_0 | \hat{a} u_0 \rangle = 0$$

in quanto per la (iv) della definizione 3.1.1 sappiamo che $\hat{a} u_0 = \underline{0}$: questo completa la dimostrazione della proposizione. $\square$

Proposizione 3.1.7 *Se definiamo*

$$u_n := \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n u_0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

allora $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sonc in H .

Dimostrazione. Dalla proposizione 3.1.6 segue

$$\begin{aligned} \langle u_n | u_m \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \langle (\hat{a}^\dagger)^n u_0 | (\hat{a}^\dagger)^m u_0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!m!}} n! \delta_{nm} \end{aligned}$$

e perciò

$$\langle u_n | u_m \rangle = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

ossia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un son. Sia ora $\psi \in \mathcal{H}$; consideriamo il suo sviluppo in serie rispetto al son $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\hat{\psi} = \sum \langle u_n | \psi \rangle u_n$$

Sappiamo che $(\psi - \hat{\psi}) \perp \overline{S_P\{u_n\}}$, ma visto che $\mathcal{D} = S_P\{u_n\}$ e $\overline{\mathcal{D}} = H$, allora $(\psi - \hat{\psi}) \perp H$. Quindi, poiché l'unico elemento ortogonale ad H è il vettore nullo, abbiamo

$$\psi = \hat{\psi} = \sum \langle u_n | \psi \rangle u_n.$$

$\square$

Proposizione 3.1.8 *Lo spettro puntuale di $\hat{N}$ consiste nei valori*

$$0, 1, 2, \dots, n, \dots$$

ed un autovettore corrispondente all'autovalore n è proprio il vettore

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n u_0$$

ossia

$$\hat{N}u_n = nu_n \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots$$

Inoltre, gli autospazi

$$M_n(\hat{N}) = \{\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mid \hat{N}\psi = n\psi\}$$

sono tutti monodimensionali. Pertanto gli autovalori di $\hat{N}$ sono non degeneri.

Dimostrazione. Dal momento che $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, avremo che se $\lambda \in \mathbb{R}$ è tale che $\hat{N}\psi = \lambda\psi$ per un certo $\psi \in \mathcal{D}$ con $\|\psi\| = 1$ (ricordiamo che $\hat{N}$ è autoaggiunto) allora

$$\langle \hat{N}\psi | \psi \rangle = \lambda \|\psi\|^2 = \lambda$$

da cui

$$\lambda = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \psi | \psi \rangle = \langle \hat{a} \psi | \hat{a} \psi \rangle = \|\hat{a} \psi\|^2$$

e da $\|\hat{a} \psi\|^2 \geq 0$ segue che $\lambda \geq 0$: quindi gli autovalori di $\hat{N}$ sono reali non negativi. Per la (iv) della definizione 3.1.1 esiste $u_0 \in \mathcal{D}$ con $\|u_0\| = 1$ tale che $\hat{a}u_0 = \underline{0}$, e quindi tale che $\hat{a}^\dagger \hat{a}u_0 = \underline{0}$ e (per come è stato definito l'operatore $\hat{N}$) $\hat{N}u_0 = \underline{0}u_0$. Perciò $0 \in \sigma_P(\hat{N})$, e per quanto detto sopra $0 = \min \sigma_P(\hat{N})$.

Da $\hat{N}u_0 = \underline{0}$, applicando a sinistra $(\hat{a}^\dagger)^j$ ($j \geq 0$) abbiamo

$$(\hat{a}^\dagger)^j \hat{N}u_0 = \underline{0}$$

e per la (i) della proposizione 3.1.5

$$\hat{N}(\hat{a}^\dagger)^j u_0 - j(\hat{a}^\dagger)^j u_0 = \underline{0}$$

da cui

$$\hat{N}(\hat{a}^\dagger)^j u_0 = j(\hat{a}^\dagger)^j u_0$$

ossia

$$\hat{N}u_j = ju_j$$

e $j(j = 0, 1, 2, \dots)$ è un autovalore con associato un autovettore u_j (di norma unitaria per la (ii) della proposizione 3.1.6).

Supponiamo ora che esistano altri autovalori: consideriamo ad esempio λ_0 oltre a $\{j : j = 0, 1, 2, \dots\}$. Visto che $\hat{N}$ è hermitiano, esiste un autovettore ψ_0 con $\|\psi_0\| = 1$ associato a λ_0 , ed esso è ortogonale agli autovettori $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Allora $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\psi_0\}$ è un sonc contenente propriamente il sonc $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$; ma questo è in contraddizione con la proprietà di massimalità dei sonc. Pertanto $\{j : j = 0, 1, 2, \dots\}$ sono tutti e soli gli autovalori di $\hat{N}$.

Infine, indicato con $M_j(\hat{N})$ l'autospazio associato all'autovalore j , se fosse

$$\dim M_j(\hat{N}) > 1$$

allora sarebbe possibile costruire (con il metodo di Graham-Schmidt) un s.o.n. in $M_j(\hat{N})$ contenente u_j ed altri vettori, e con un ragionamento analogo al precedente si dimostra che ciò è assurdo. $\square$

Corollario 3.1.9 *Valgono le seguenti:*

$$(i) \quad \hat{H}u_n = \omega\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)u_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(ii) \quad \sigma_P(\hat{H}) = \left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega\hbar : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Inoltre, gli autovalori sono non degeneri.

Dimostrazione. È sufficiente ricordarsi delle relazioni che legano $\hat{H}$ a $\hat{N}$. $\square$

Proposizione 3.1.10 *Se indichiamo con M_n l'autospazio associato all'autovalore n di $\hat{N}$,*

$$(i) \quad \hat{a}^\dagger u_n = \sqrt{n+1}u_{n+1}, \text{ da cui segue che } \hat{a}^\dagger(M_n) \subseteq M_{n+1} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$(ii) \quad \hat{a}u_n = \sqrt{n}u_{n-1}, \text{ da cui segue che } \hat{a}(M_n) \subseteq M_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger u_n &= \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n u_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^{n+1} u_0 \\ &= \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\sqrt{n!}} \left(\frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} (\hat{a}^\dagger)^{n+1} u_0 \right) \\ &= \sqrt{n+1} u_{n+1} \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\hat{a}u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}(\hat{a}^\dagger)^n u_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}u_0 + \frac{n}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^{n-1} u_0$$

ove l'ultima uguaglianza discende dalla (3.9) nella dimostrazione della proposizione 3.1.6. Essendo però $\hat{a}u_0 = \mathbf{0}$, avremo che:

$$\begin{aligned} \hat{a}u_n &= \frac{n}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^{n-1} u_0 \\ &= \frac{n}{\sqrt{n!}} \sqrt{(n-1)!} \left(\frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} (\hat{a}^\dagger)^{n-1} u_0 \right) \\ &= \frac{n}{\sqrt{n}} u_{n-1} = \sqrt{n} u_{n-1} \end{aligned}$$

$\square$

3.2 Interpretazione fisica

Consideriamo un generico spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Se su $\mathcal{H}$ è data una realizzazione delle CCR tramite due operatori $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ in esso densamente definiti, possiamo interpretare l'operatore

$$\hat{H}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{2}[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]_+$$

in due diversi modi:

- (i) come l'hamiltoniano di un oscillatore armonico caratterizzato da una massa m e da una costante elastica k tali che la pulsazione caratteristica sia $\omega = \sqrt{k/m} = \eta/m$ (proposizione 2.1.1).
- (ii) come l'hamiltoniano di un modo di vibrazione per un'onda monocromatica (anche elettromagnetica) di frequenza $\nu = 2\pi\omega$ (sezioni 2.2 e 2.3; equazione (2.64)).

Per il corollario 3.1.9, i possibili valori di energia per questo sistema fisico formano un insieme discreto, ed i vari livelli sono espressi dalla relazione

$$E_n = \omega\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n \in \mathbb{N}$$

Tutti questi livelli sono non degeneri, ed il livello *fondamentale*, ossia quello di energia più bassa corrispondente a $n = 0$, è

$$E_0 = \frac{\omega\hbar}{2}$$

Per cui si ha

$$E_n = E_0 + n\omega\hbar, \quad n \in \mathbb{N}$$

L'elemento $u_0 \in \mathcal{D}$ del punto (iv) della definizione 3.1.1 è un elemento rappresentativo dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico in esame, mentre l'elemento $u_n = (1/\sqrt{n!})(\hat{a}^\dagger)^n u_0 \in \mathcal{D}$ rappresenta lo stato eccitato n -esimo di questo oscillatore.

I vari livelli sono equidistanti fra loro ed il *salto energetico* fra un livello ed il precedente o il successivo è di $\omega\hbar$.

L'operatore $\hat{a}^\dagger$, per la (i) della proposizione 3.1.10, caratterizza quindi una transizione dal livello n -esimo al livello $(n+1)$ -esimo: in altri termini, aumenta l'eccitazione del sistema in esame. Corrispondentemente, per la (ii) della stessa proposizione, $\hat{a}$ caratterizza una transizione dal livello n -esimo al livello immediatamente precedente: pertanto $\hat{a}$ diminuisce l'eccitazione del sistema.

Interpretazione “numero di occupazione”. Nel contesto appena discusso, l'operatore $\hat{N}$ è privo di significato fisico immediato. È però possibile fornire un'altra interpretazione fisica, particolarmente suggestiva, in cui $\hat{N}$ riveste un ruolo centrale. Si può infatti interpretare $\mathcal{H}$ come lo spazio di Hilbert che descrive un sistema costituito da un numero finito di particelle sottoposto a processi in cui sia possibile creare o annichilare particelle dal sistema: in questo contesto $M_0(\hat{N})$ rappresenta lo stato in cui il sistema non contiene alcuna particella, il cosiddetto *stato di vuoto*, il cui elemento rappresentativo u_0 è il vettore di vuoto (secondo Fock). Allo stesso modo, $M_1(\hat{N})$ rappresenta lo stato in cui il sistema è costituito da una particella, $M_2(\hat{N})$ quello in cui è costituito da due particelle e così via: abbiamo allora che $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ sono vettori rappresentativi rispettivamente dello stato in cui il sistema è formato da zero, una, due, $\dots, n, \dots$ particelle, e così via.

L'operatore $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ è quindi l'operatore associato all'osservabile *numero di particelle* che costituiscono il sistema, o anche *operatore numero di occupazione*.

L'operatore $\hat{a}^\dagger$ viene chiamato *operatore di creazione* poiché, per la (i) della proposizione 3.1.5, descrive la transizione da uno stato in cui il sistema è costituito da n particelle ad uno stato in cui esso è costituito da $(n+1)$ particelle; analogamente, $\hat{a}$ è l'*operatore di distruzione o annichilazione*.

3.3 Rappresentazione matriciale

Consideriamo una realizzazione secondo Fock delle CCR nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Vogliamo darne una rappresentazione matriciale, scelto come sono di vettori di $\mathcal{H}$ il sistema

$$\left\{ u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n u_0 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ricordiamo che rispetto a questo sono l'azione degli operatori di creazione e di annichilazione è data dalle relazioni:

$$\begin{cases} \hat{a} u_n = \sqrt{n} u_{n-1} & \text{per } n=1,2,\dots \\ \hat{a} u_0 = \underline{0} \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\hat{a}^* u_n = \sqrt{n+1} u_{n+1} \quad \text{per } n=0,1,2,\dots \quad (3.12)$$

Nella rappresentazione matriciale rispetto a (3.11), sappiamo che i vettori del sono sono espressi dai vettori

$$u_n \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ } n\text{-esimo posto}$$

Lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ si identifica con lo spazio di Hilbert $l_2(\mathbb{C})$, mentre $\mathcal{D}$ si identifica con la varietà lineare $d_2(\mathbb{C})$ dei vettori di $l_2(\mathbb{C})$ i cui elementi non nulli sono in numero finito.

Osservato che l'operatore di creazione soddisfa le relazioni

$$\langle u_n | \hat{a} u_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{per } m=0 \\ \sqrt{m} \delta_{n,m-1} & \text{per } n = 0, 1, 2, \dots \text{ e } m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.13)$$

abbiamo che la matrice associata ad $\hat{a}$, intesa come agente sullo spazio $d_2(\mathbb{C})$ è

$$M(\hat{a}) = \begin{pmatrix} 0, & \sqrt{1}, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & \sqrt{2}, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \sqrt{3}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

e ricordando che l'operatore $\hat{a}^\dagger$ è l'aggiunto di $\hat{a}$, abbiamo che la matrice associata all'operatore $\hat{a}^\dagger$ è

$$M(\hat{a}^\dagger) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ \sqrt{1}, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & \sqrt{2}, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & \sqrt{3}, & 0, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Tenendo conto di (3.3) e (3.4) si ottiene immediatamente che le matrici associate agli operatori $\hat{x}$ e $\hat{p}$ sono:

$$M(\hat{x}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\eta}} \begin{pmatrix} 0, & \sqrt{1}, & 0, & 0, & \dots \\ \sqrt{1}, & 0, & \sqrt{2}, & 0, & \dots \\ 0, & \sqrt{2}, & 0, & \sqrt{3}, & \dots \\ 0, & 0, & \sqrt{3}, & 0, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$M(\hat{p}) = -i\sqrt{\frac{\hbar\eta}{2}} \begin{pmatrix} 0, & \sqrt{1}, & 0, & 0, & \dots \\ -\sqrt{1}, & 0, & \sqrt{2}, & 0, & \dots \\ 0, & -\sqrt{2}, & 0, & \sqrt{3}, & \dots \\ 0, & 0, & -\sqrt{3}, & 0, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ricordando i risultati della proposizione 3.1.8, la matrice associata all'operatore numero d'occupazione è

$$M(\hat{N}) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 1, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 2, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 3, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

e questo risultato è in accordo con la definizione (3.1): infatti

$$M(\hat{a}^\dagger)M(\hat{a}) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 1, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 2, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 3, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Infine, dal corollario 3.1.9 si ottiene

$$M(\hat{H}) = \omega\hbar \begin{pmatrix} 1/2, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 3/2, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 5/2, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 7/2, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

In particolare, facciamo osservare che in questa rappresentazione matriciale gli operatori numero di occupazione e l'operatore hamiltoniano sono dati da matrici diagonali. Inoltre

$$M(\hat{a})M(\hat{a}^\dagger) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 2, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 3, & 0, & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 4, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

coerentemente con la (ii) della definizione 3.1.1.

Indicato con

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

il generico vettore di $d_2(\mathbb{C})$, l'azione della matrice $M(\hat{a})$ su $\underline{x}$ è

$$M(\hat{a}) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1}c_1 \\ \sqrt{2}c_2 \\ \sqrt{3}c_3 \\ \vdots \\ \sqrt{n+1}c_{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_{n=0} \sqrt{n+1} \langle \underline{u}_{n+1} | \underline{x} \rangle \underline{u}_n$$

Come si vede da questo risultato, l'operatore $\hat{a}$ ha un comportamento analogo all'operatore di shift a sinistra. L'azione della matrice $M(\hat{a}^\dagger)$ sul generico

vettore $\underline{x}$ è invece espressa dalla

$$M(\hat{a}^\dagger) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1}c_0 \\ \sqrt{2}c_1 \\ \vdots \\ \sqrt{n}c_{n-1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_{n=0} \sqrt{n+1} \langle \underline{u}_n | \underline{x} \rangle \underline{u}_{n+1} \quad (3.16)$$

In questo caso, il comportamento dell'operatore $\hat{a}^\dagger$ è analogo ad uno shift a destra. Da questi due ultimi risultati, ritornando alla rappresentazione nello spazio $\mathcal{D}$, possiamo esprimere i due operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ come

$$\hat{a}(x) = \sum_{n=0} \sqrt{n+1} \langle u_{n+1} | x \rangle u_n \quad (3.17)$$

$$\hat{a}^\dagger(x) = \sum_{n=0} \sqrt{n+1} \langle u_n | x \rangle u_{n+1} \quad (3.18)$$

in accordo con i risultati

$$\begin{aligned} \hat{a}(u_n) &= \sum_{j=0} \sqrt{j+1} \langle u_{j+1} | u_n \rangle u_j = \begin{cases} \sqrt{n} u_{n-1}, & \text{per } n = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{per } n = 0 \end{cases} \\ \hat{a}^\dagger(u_n) &= \sum_{j=0} \sqrt{j+1} \langle u_j | u_n \rangle u_{j+1} = \sqrt{n+1} u_{n+1} \end{aligned}$$

Nel seguito sarà particolarmente utile considerare le potenze di grado r (qualsiasi) della matrice $M(\hat{a}^\dagger)$, e quindi l'azione del corrispondente operatore $M(\hat{a}^\dagger)^r$. In primo luogo osserviamo che

$$M(\hat{a}^\dagger)^2 \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{1}\sqrt{2}c_0 \\ \sqrt{2}\sqrt{3}c_1 \\ \vdots \\ \sqrt{n-1}\sqrt{n}c_{n-2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_{n=0} \sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \langle \underline{u}_n | \underline{x} \rangle \underline{u}_{n+2}$$

e da questa segue che in generale

$$M(\hat{a}^\dagger)^r(\underline{x}) = \sum_{n=0} \sqrt{n+1} \dots \sqrt{n+r} \langle \underline{u}_n | \underline{x} \rangle \underline{u}_{n+r}$$

Osservazione 3.3.1 Se si richiedesse che il vettore $\underline{x}$ sia un generico elemento di $l_2(\mathcal{C})$, la condizione che per ogni r il vettore $M(\hat{a}^\dagger)^r(\underline{x})$ sia ancora un elemento di $l_2(\mathcal{C})$ si tradurrebbe in

$$\sum_{n=0} (n+r) \dots (n+1) |\langle \underline{u}_n | \underline{x} \rangle|^2 < +\infty. \quad (3.19)$$

3.4 Spazi di tipo $\mathcal{S}$ e realizzabilità delle CCR secondo Fock

Nella sezione 3.3 abbiamo realizzato le CCR secondo Fock nello spazio particolare

$$\mathcal{D} = \mathcal{S}_P \left\{ (\hat{a}^\dagger)^n u_0 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

In questo paragrafo, seguendo le indicazioni di Kristensen, Mejlbo e Poulsen [15], vogliamo studiare la classe degli spazi con prodotto interno rispetto ai quali è possibile dare una realizzazione delle CCR secondo Fock. Precisamente:

Definizione 3.4.1 *Dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, definiamo come spazio di tipo $\mathcal{S}$ in $\mathcal{H}$ uno spazio soddisfacente le seguenti condizioni:*

- (i) *Lo spazio $\mathcal{S}$ è una varietà lineare di $\mathcal{H}$ munita del prodotto interno indotto su di esso dall'originale prodotto interno di $\mathcal{H}$.*
- (ii) *Esistono due operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ rispetto ai quali lo spazio $\mathcal{S}$ è stabile, che sono uno l'aggiunto dell'altro rispetto al prodotto interno e che soddisfano la relazione di commutazione canonica su $\mathcal{S}$:*

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbb{I}$$

- (iii) *Nello spazio $\mathcal{S}$ esiste un vettore unitario u_0 che verifica l'eguaglianza $\hat{a}u_0 = \underline{0}$ e che è ciclico rispetto agli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, ossia tale che*

$$\mathcal{D} = \mathcal{S}_P \left\{ (\hat{a}^\dagger)^n u_0 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

è denso nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

Come si vede da questa definizione, uno spazio di tipo $\mathcal{S}$ è il secondo elemento di una coppia $(\mathcal{H}, \mathcal{S})$ composta da uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e uno spazio con prodotto interno $\mathcal{S}$ indotto da $\mathcal{H}$, munita di una terna $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, u_0)$ per la quale valgono le proprietà della definizione 3.1.1, con in più la richiesta che $\mathcal{D}$ sia denso in $\mathcal{H}$.

Definizione 3.4.2 *Dato uno spazio di tipo $\mathcal{S}$, per ogni intero non negativo n introduciamo il vettore u_n , chiamato l'elemento n -esimo di Hermite, e definito da*

$$u_n = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n u_0}{\sqrt{n!}}$$

ed indichiamo con

$$\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}_P \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$$

la varietà lineare di $\mathcal{S}$ generata da tutti gli u_n .

Procedendo come nella sezione 3.1 si verifica che

$$\hat{a}u_n = \begin{cases} \sqrt{n}u_{n-1} & \text{per } n=1,2,\dots \\ 0 & \text{per } n=0 \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\hat{a}^\dagger u_n = \sqrt{n+1}u_{n+1} \quad \text{per } n=0,1,2,\dots \quad (3.21)$$

Questo risultato mostra che $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{D}$ e che $\{u_n\}$ è un sonc per $\mathcal{D}$. In particolare, ogni elemento $x \in \mathcal{D}$ ha un'unica rappresentazione quale combinazione lineare finita

$$x = \sum c_n u_n = \sum \langle u_n | x \rangle u_n,$$

ove la sommatoria coinvolge un numero finito di termini.

Riassumendo, allora,

Proposizione 3.4.3 *La varietà lineare*

$$\mathcal{D} = S_P \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$$

è uno spazio di tipo $\mathcal{S}$ in $\mathcal{H}$ che, ovviamente, ha la proprietà di essere il più piccolo spazio di tipo $\mathcal{S}$ in $\mathcal{H}$ rispetto alla terna $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, u_0)$.

Osservato che $\{u_n\}$ è un sonc sia di $\mathcal{D}$ che di $\mathcal{H}$, possiamo costruire le rappresentazioni matriciali di questi due spazi rispetto al sonc di Hermite $\{u_n\}$ ottenendo gli spazi $d_2(\mathbb{C})$ e $l_2(\mathbb{C})$. Indicato con $J : \mathcal{H} \rightarrow l_2(\mathbb{C})$ l'operatore unitario definito da

$$x \in \mathcal{H} \rightarrow J(x) = \{c_n = \langle u_n | x \rangle\} \in l_2(\mathbb{C})$$

che permette l'identificazione fra i vari spazi in oggetto, ricordiamo che fra gli spazi $d_2(\mathbb{C})$ e $l_2(\mathbb{C})$ esiste, come spazio intermedio, lo spazio

$$s_2(\mathbb{C}) = \{\{c_n\} \in l_2(\mathbb{C})\} : \sum (n+1)^r |c_n|^2 < +\infty \quad \text{per ogni } r$$

delle successioni complesse a decrescita rapida.

Nel seguito indicheremo con $\mathcal{S}$ lo spazio, contenuto tra $\mathcal{D}$ e $\mathcal{H}$, immagine secondo l'operatore unitario J^{-1} dello spazio $s_2(\mathbb{C})$: pertanto

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathcal{H} : \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^r |\langle u_n | x \rangle|^2 < +\infty \quad \text{per ogni } r \right\}$$

Proposizione 3.4.4 *$\mathcal{S}$ è il più grande spazio di tipo $\mathcal{S}$ in $\mathcal{H}$ rispetto alla terna $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, u_0)$.*

Dimostrazione. Cominciamo considerando un generico spazio di tipo $\mathcal{S}$ in $\mathcal{H}$, che indichiamo con $\mathcal{S}^*$, e verificando che $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{S}$.

Gli elementi di Hermite $\{u_n\}$ costituiscono un sonc di $\mathcal{H}$ contenuto in $\mathcal{D}$ e quindi anche un sonc di $\mathcal{S}^*$. Gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ su $\mathcal{S}^*$ agiranno sugli

elementi di questo sono secondo la (3.20) e la (3.21) e quindi, procedendo come nella sezione 3.3, troviamo che le rappresentazioni matriciali di questi due operatori sono date dalle matrici $M(\hat{a})$ e $M(\hat{a}^\dagger)$. Di conseguenza, la condizione di stabilità dello spazio $\mathcal{S}^\star$ rispetto all'operatore $\hat{a}^\dagger$ si traduce nella richiesta di validità della condizione (3.19)

$$\sum (n+r) \dots (n+1) |c_n|^2 < +\infty$$

dalla quale, essendo

$$\sum (n+1)^r |c_n|^2 \leq \sum (n+r) \dots (n+1) |c_n|^2$$

segue che necessariamente $J(x) \in s_2(\mathbb{C})$ per ogni $x \in \mathcal{S}^\star$. Pertanto, ritornando agli spazi originali:

$$\mathcal{S}^\star \subseteq \mathcal{S}$$

per ogni $\mathcal{S}^\star$.

Verifichiamo ora che $\mathcal{S}$ è uno spazio di tipo $\mathcal{S}$.

Introduciamo, per ogni $x \in \mathcal{S}$, i vettori

$$\hat{a}(x) := \sum \sqrt{n+1} \langle u_{n+1}|x \rangle u_n \quad (3.22)$$

$$\hat{a}^\dagger(x) := \sum \sqrt{n+1} \langle u_n|x \rangle u_{n+1} \quad (3.23)$$

Verifichiamo che questi appartengono allo spazio $\mathcal{S}$: da questo risultato segue che (3.22) e (3.23) definiscono due operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$, estensioni ad $\mathcal{S}$ degli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ definiti su $\mathcal{D}$ e $\mathcal{S}^\star$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} (n+1)^r |\langle u_n|\hat{a}(x) \rangle|^2 &= (n+1)^{r+1} |\langle u_{n+1}|x \rangle|^2 \\ (n+1)^r |\langle u_n|\hat{a}^\dagger(x) \rangle|^2 &= (n+1)^{r+1} |\langle u_n|x \rangle|^2 \end{aligned}$$

Dalla prima di queste relazioni segue che

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^r |\langle u_n|\hat{a}(x) \rangle|^2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^{r+1} |\langle u_{n+1}|x \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{r+1} |\langle u_n|x \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{r+1} |\langle u_n|x \rangle|^2 \end{aligned}$$

mentre dalla seconda

$$\sum (n+1)^r |\langle u_n|\hat{a}^\dagger(x) \rangle|^2 = \sum (n+1)^r |\langle u_n|x \rangle|^2$$

Pertanto dalla condizione che $x \in \mathcal{S}$, ossia che la serie

$$\sum (n+1)^r |\langle u_n | x \rangle|^2$$

sia convergente per ogni r , segue che $\hat{a}(x)$ e $\hat{a}^\dagger(x)$ sono ben posti e che essi sono due vettori di $\mathcal{S}$.

Dalle (3.22) e (3.23) segue immediatamente che le rappresentazioni matriciali degli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ su $s_2(\mathbb{C})$ sono ancora una volta le matrici $M(\hat{a})$ e $M(\hat{a}^\dagger)$ viste nella sezione 3.3, e ciò implica che $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ sono una estensione da $\mathcal{S}$ degli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ definiti su $\mathcal{D}$ e $\mathcal{S}^*$. $\square$

Osservazione 3.4.5 Possiamo unire i risultati delle due precedenti proposizioni nell'affermazione: fissato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ che ammetta uno spazio di tipo $\mathcal{S}$ in $\mathcal{H}$ con la terna $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, u_0)$, si possono sempre costruire due spazi di tipo $\mathcal{S}$ in $\mathcal{H}$, indicati con $\mathcal{D}$ e $\mathcal{S}$, che hanno le proprietà di essere rispettivamente il più piccolo ed il più grande spazio di tipo $\mathcal{S}$ in $\mathcal{H}$ rispetto alla terna $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, u_0)$. In altri termini, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{S}$ sono tali che per ogni spazio $\mathcal{S}^*$ che sia di tipo $\mathcal{S}$ in $\mathcal{H}$ rispetto alla terna $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, u_0)$ valgono le inclusioni

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{S}$$

Inoltre, definito il sonc di Hermite, lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è identificabile con lo spazio di Hilbert $l_2(\mathbb{C})$ mentre $\mathcal{D}$ e $\mathcal{S}$ sono identificabili con $d_2(\mathbb{C})$ e $s_2(\mathbb{C})$ rispettivamente.

Proposizione 3.4.6 *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, e sia $\{u_n\}$ un sonc per $\mathcal{H}$. Possiamo costruire esplicitamente il più piccolo e il più grande spazio di tipo $\mathcal{S}$ in $\mathcal{H}$ per i quali $\{u_n\}$ sia il sonc di Hermite.*

Dimostrazione. Rappresentato lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ su $l_2(\mathbb{C})$ tramite l'operatore unitario

$$J(x) := \{c_n = \langle u_n | x \rangle\}$$

possiamo sempre costruire due sottovarietà $d_s(\mathbb{C})$ e $s_2(\mathbb{C})$ di $l_2(\mathbb{C})$ considerate come spazi con l'usuale prodotto interno fra successioni complesse. Se definiamo

$$\begin{aligned} \hat{a}(x) &= \sum (n+1)^{1/2} \langle u_{n+1} | x \rangle u_n \\ \hat{a}^\dagger(x) &= \sum (n+1)^{1/2} \langle u_n | x \rangle u_{n+1} \end{aligned}$$

le rappresentazioni matriciali di $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ sono rispettivamente $M(\hat{a})$ e $M(\hat{a}^\dagger)$ definite da (3.14) e (3.15), che sappiamo fornire una realizzazione delle CCR secondo Fock in $l_2(\mathbb{C})$: di conseguenza, $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ realizzano le CCR secondo Fock in $\mathcal{H}$.

Definiti

$$\mathcal{D} := J^{-1}(d_2(\mathbb{C})) = \left\{ \sum_0 c_n u_n : \text{somme finite} \right\}$$

$$\mathcal{S} := J^{-1}(s_2(\mathbb{C})) = \left\{ \sum_0 c_n u_n : \sum_0 (n+1)^r |c_n|^2 < \infty \text{ per ogni } r \right\}$$

allora, per l'osservazione 3.4.5, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{S}$ sono il più piccolo e il più grande spazio di tipo $\mathcal{S}$ in $\mathcal{H}$ rispetto alla terna $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, u_0)$. Mostriamo ora che $\mathcal{D}$ e $\mathcal{S}$ sono proprio gli spazi di cui abbiamo bisogno per la validità della tesi.

Sia $\mathcal{B}$ un generico spazio di tipo $\mathcal{S}$ in $\mathcal{H}$ rispetto alla terna $(\hat{b}, \hat{b}^\dagger, v_0)$, con $\hat{b}$ e $\hat{b}^\dagger$ in generale diversi da $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$. Allora, per quanto detto nella sezione 3.3, la rappresentazione matriciale rispetto al sonc di hermite $\{v_n\}$ generato da $\hat{b}$ e $\hat{b}^\dagger$ è la stessa di $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ rispetto a $\{u_n\}$. In particolare, se richiediamo che $\{u_n\}$ sia il sonc di hermite per $\mathcal{B}$ (cioè che $v_n = u_n \forall n \in \mathbb{N}$) allora necessariamente

$$\hat{b} = \hat{a} \quad \hat{b}^\dagger = \hat{a}^\dagger \quad v_0 = u_0$$

Di conseguenza, $\mathcal{B}$ è uno spazio di tipo $\mathcal{S}$ in $\mathcal{H}$ rispetto alla terna $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, u_0)$ e per quanto detto sopra

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$$

da cui la tesi per l'arbitrarietà di $\mathcal{B}$. □

Capitolo 4

Interferometro di Mach-Zehnder

4.1 Rappresentazione dual-rail

Consideriamo una cavità elettromagnetica ad alto fattore di qualità e di frequenza caratteristica ω . Siamo interessati a dare la descrizione quantistica di un singolo modo elettromagnetico di frequenza ω intrappolato in questa cavità, senza curarci della polarizzazione. Per quanto detto finora, tale descrizione può essere effettuata in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ infinito dimensionale, complesso e separabile, che ammetta in esso uno spazio di tipo $\mathcal{S}$ rispetto ad una terna $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, u_0)$, con $\mathcal{S}$ stabile rispetto a $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ e u_0 unitario secondo quanto formalizzato nella definizione 3.4.1. Come prescritto da (2.64), l'evoluzione dinamica del sistema è governata dall'operatore hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]_+ \quad (4.1)$$

e $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ è l'operatore numero di occupazione del modo. In altri termini, esso descrive il *numero di fotoni* di energia $\hbar\omega$ presenti nella cavità, e i suoi autovalori sono $0, 1, 2, \dots$, interpretati come possibili numeri di fotoni presenti nella cavità.

Consideriamo un interferometro di Mach-Zehnder come quello di figura 4.1: il nostro scopo, per questo capitolo, è discutere l'azione dell'apparato su un pacchetto d'onda in ingresso. Per fare questo, seguendo Nielsen e Chuang [18] facciamo alcune semplificazioni operative: ragioniamo su componenti assolutamente ideali (esenti, in particolare, da fenomeni di assorbimento) e consideriamo un pacchetto che si propaga attraverso un braccio dell'interferometro come lo stato di una cavità fittizia che immaginiamo si “propaghi” assieme ad esso.

In particolare, adottando quella che viene comunemente detta *rappresentazione dual-rail*, consideriamo la direzione di propagazione della luce

Figura 4.1: Interferometro di Mach-Zehnder. I beamsplitter sono indicati con BS , lo sfasatore con PS e il sistema di specchi con M .

come elemento che ci permette di distinguere i due bracci dell'interferometro (la propagazione lungo x caratterizza il primo braccio, e quella lungo y il secondo) e associamo il sistema a uno spazio di hilbert

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

dove ciascuno degli $\mathcal{H}_i$ soddisfa alle richieste fatte a inizio capitolo (ovvero: è adatto a descrivere un singolo modo elettromagnetico in cavità alla frequenza ω), e di conseguenza è dotato della sua terna $(\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger, u_{0i})$. Per i risultati della sezione 3.4 (e conservando la stessa notazione), gli operatori di creazione e annichilazione si estendono naturalmente tramite (3.22) e (3.23) alla varietà lineare $\mathcal{S}_i$, e da qui al prodotto tensore $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$ secondo le definizioni:

$$\begin{aligned} a_1 &:= \hat{a}_1 \otimes \mathbb{I}_2 & a_1^\dagger &:= \hat{a}_1^\dagger \otimes \mathbb{I}_2 \\ a_2 &:= \mathbb{I}_1 \otimes \hat{a}_2 & a_2^\dagger &:= \mathbb{I}_1 \otimes \hat{a}_2^\dagger \end{aligned}$$

con ovvia interpretazione degli operatori $\mathbb{I}_i$ come operatori identità sullo spazio $\mathcal{S}_i$. Ovviamente, valgono le seguenti regole di commutazione su $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$, ove denotiamo con $\mathbb{I}$, senza indice, l'operatore identità su di esso:

$$[a_1, a_1^\dagger] = \mathbb{I} \quad \text{e} \quad [a_2, a_2^\dagger] = \mathbb{I} \quad (4.2)$$

Possiamo fare la stessa cosa con l'operatore *numero di particelle* sul singolo braccio $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} N_1 &= a_1^\dagger a_1 = (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1) \otimes \mathbb{I}_2 = \hat{N}_1 \otimes \mathbb{I}_2 \\ N_2 &= a_2^\dagger a_2 = \mathbb{I}_1 \otimes (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) = \mathbb{I}_1 \otimes \hat{N}_2 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo gli operatori *hamiltoniani* di singolo braccio

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\hbar\omega}{2}[a_1, a_1^\dagger]_+ = \hbar\omega(N_1 + \frac{1}{2}\mathbb{I}) \\ H_2 &= \frac{\hbar\omega}{2}[a_2, a_2^\dagger]_+ = \hbar\omega(N_2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}) \end{aligned}$$

Osserviamo che, poiché $\mathcal{B}_i := \{|n_i\rangle : n_i \in \mathbb{N}\}$ è una base per il singolo spazio con prodotto interno $\mathcal{S}_i$ per $i = 1, 2$, la famiglia di vettori $\mathcal{B}_{1,2} := \{|n_1, n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle : n_1, n_2 \in \mathbb{N}\}$ è una *base standard* per il prodotto tensore $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$.

Osservazione 4.1.1 Consideriamo un operatore $\hat{A}_1$ hermitiano su $\mathcal{S}_1$. Assumiamo $A_1 := \hat{A}_1 \otimes \mathbb{I}$ come suo rappresentativo su $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$: allora abbiamo che per gli stati fattorizzati di questo spazio $\Psi = \psi_1 \otimes \psi_2$ i valori di aspettazione sono

$$\begin{aligned} \langle A_1 \rangle_\Psi &= \langle \Psi | A_1 \Psi \rangle = \langle \psi_1 \otimes \psi_2 | (\hat{A}_1 \otimes \mathbb{I}) \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle \\ &= \langle \psi_1 \otimes \psi_2 | (\hat{A}_1 \psi_1) \otimes \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{A}_1 \psi_1 \rangle \\ &= \langle \hat{A}_1 \rangle_{\psi_1} \end{aligned}$$

Possiamo anche scrivere che, fissato $\psi_1 \in \mathcal{S}_1$, qualunque sia $\psi_2 \in \mathcal{S}_2$ vale l'identità

$$\langle A_1 \rangle_{\psi_1 \otimes \psi_2} = \langle \hat{A}_1 \rangle_{\psi_1}$$

In altri termini, il valore di aspettazione in $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$ dell'osservabile $A_1 = \hat{A}_1 \otimes \mathbb{I}$ nello stato $\Psi = \psi_1 \otimes \psi_2$ coincide col valore di aspettazione in $\mathcal{S}_1$ dell'osservabile $\hat{A}_1$ nello stato ψ_1 qualunque sia lo stato $\psi_2 \in \mathcal{S}_2$. Questa è la motivazione principale che ci spinge ad utilizzare $\hat{A}_1 \otimes \mathbb{I}$ come rappresentativo di $\hat{A}_1$ in $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$.

Tuttavia, non bisogna dimenticare che in questo contesto ci si possono porre dei problemi formali non indifferenti: il principale è l'estensione di questa regola di interpretazione al caso di stati entangled di $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$, come lo stato EPR $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 \otimes \psi_2 - \psi_2 \otimes \psi_1)$ che è una *sovrapposizione* di due stati fattorizzati. Ma questi interessanti problemi fondamentali sono al di fuori del contesto in cui è formulata questa tesi.

Introduciamo ora l'operatore hermitiano $N = N_1 + N_2$ su $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$, che può essere interpretato come l'osservabile *numero di particelle* del sistema composto. Ovviamente,

$$N|n_1, n_2\rangle = (n_1 + n_2)|n_1, n_2\rangle$$

Da questa segue che, per un fissato intero $n \in \mathbb{N}$, tutte le coppie di interi $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ per cui $n = n_1 + n_2$ determinano lo stesso autovalore di N . Per esempio, nel caso di $n = 0$ avremo la sola possibilità $0 = 0 + 0$, mentre per $n = 1$ avremo le due possibilità $1 = 0 + 1 = 1 + 0$, e per $n = 2$ le tre possibilità

$2 = 2 + 0 = 1 + 1 = 0 + 2$; in generale, possiamo dire che per ogni n esistono $n + 1$ possibili sue rappresentazioni come somma di due interi $n = n_1 + n_2$. Ne segue che, fissato $n \in \mathbb{N}$, tutti gli elementi della base $\mathcal{B}_{1,2}$ della forma $|n_1, n_2\rangle$ con $n_1 + n_2 = n$ sono autovettori di N con n come autovalore: ogni autovalore n è quindi $n + 1$ volte degenerare. In altri termini, possiamo ordinare la *base standard* $\mathcal{B}$ di $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$ secondo il seguente ordine lessicografico:

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{|00\rangle}_{0 \text{ fotoni}}, \underbrace{|10\rangle, |01\rangle}_{1 \text{ fotone}}, \underbrace{|20\rangle, |11\rangle, |02\rangle}_{2 \text{ fotoni}}, \dots \right. \\ \left. \dots, \underbrace{|n0\rangle, |(n-1)1\rangle, \dots, |1(n-1)\rangle, |0n\rangle}_{n \text{ fotoni}}, \dots \right\}$$

e possiamo definire lo *spazio di Fock a n fotoni* (in rappresentazione dual-rail) $\mathcal{F}^{(n)}$ come l'autospazio ($n + 1$ -dimensionale) di N rispetto all'autovalore n , con la sua base standard $\mathcal{B}^{(n)}$:

Autovalore	Base standard	Autospazio
$n_1 + n_2 = 0$	$\mathcal{B}^{(0)} = \{ 00\rangle\}$	$\mathcal{F}^{(0)} = \text{span}(\mathcal{B}^{(0)})$
$n_1 + n_2 = 1$	$\mathcal{B}^{(1)} = \{ 10\rangle, 01\rangle\}$	$\mathcal{F}^{(1)} = \text{span}(\mathcal{B}^{(1)})$
$n_1 + n_2 = 2$	$\mathcal{B}^{(2)} = \{ 20\rangle, 11\rangle, 02\rangle\}$	$\mathcal{F}^{(2)} = \text{span}(\mathcal{B}^{(2)})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n_1 + n_2 = n$	$\mathcal{B}^{(n)} = \{ n0\rangle, (n-1)1\rangle, \dots, 1(n-1)\rangle, 0n\rangle\}$	$\mathcal{F}^{(n)} = \text{span}(\mathcal{B}^{(n)})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Con queste scelte, ovviamente

$$\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2 = \mathcal{F}^{(0)} \oplus \mathcal{F}^{(1)} \oplus \mathcal{F}^{(2)} \oplus \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathcal{F}^{(n)}$$

4.1.1 Formalismo di Schwinger

Introduciamo ora i seguenti operatori definiti su $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$ (e a valori in $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$):

$$J_+ := \hbar a_1^\dagger a_2 \quad \text{e} \quad J_- := \hbar a_2^\dagger a_1 \quad (4.3a)$$

$$J_z := \hbar \frac{(N_1 - N_2)}{2} = \frac{\hbar}{2} (a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) \quad (4.3b)$$

Con essi definiamo gli ulteriori operatori

$$J_x := \frac{J_+ + J_-}{2} = \frac{\hbar}{2} (a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2) \quad (4.4a)$$

$$J_y := \frac{J_+ - J_-}{2i} = \frac{i\hbar}{2} (a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2) \quad (4.4b)$$

È allora immediato verificare che vale l'identità

$$J^2 := J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \hbar^2 \left(\frac{\hat{N}}{2} \right) \left(\frac{\hat{N}}{2} + 1 \right) \quad (4.4c)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \frac{4}{\hbar^2} (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) &= (a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2)^2 - (a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2)^2 + (N_1 - N_2)^2 \\ &= 2a_2^\dagger a_1 a_1^\dagger a_2 + 2a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1 + N_1^2 + N_2^2 - 2N_1 N_2 \\ &= N_1^2 + N_2^2 + 2N_1 N_2 + 2N_1 + 2N_2 \\ &= N(N + 2) \end{aligned}$$

Usando (4.2) è facile mostrare che la terna di operatori $\{J_x, J_y, J_z\}$ soddisfa le usuali regole di commutazione di un momento angolare su $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$:

$$[J^2, J_z] = 0 \quad , \quad [J^2, J_\pm] = 0 \quad (4.5a)$$

$$[J_z, J_\pm] = \pm \hbar J_\pm \quad , \quad [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \quad (4.5b)$$

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k \quad (4.5c)$$

Inoltre, se consideriamo che

$$\begin{aligned} J_+ |n_1, n_2\rangle &= \hbar \sqrt{n_2(n_1 + 1)} |n_1 + 1, n_2 - 1\rangle \\ J_- |n_1, n_2\rangle &= \hbar \sqrt{n_1(n_2 + 1)} |n_1 - 1, n_2 + 1\rangle \end{aligned}$$

possiamo interpretare J_+ (rispettivamente, J_-) come l'operatore che sposta un fotone dal secondo (primo) braccio al primo (secondo), mantenendo invariato il numero totale di fotoni; quindi

$$J_+(\mathcal{F}^{(n)}) \subseteq \mathcal{F}^{(n)} \quad \text{e} \quad J_-(\mathcal{F}^{(n)}) \subseteq \mathcal{F}^{(n)}$$

Otteniamo anche

$$J_- |0, n_2\rangle = \underline{0} \quad \text{e} \quad J_+ |n_1, 0\rangle = \underline{0}$$

La rappresentazione di J^2 , J_z e $J_\pm$ rispetto a $\mathcal{B}$ è la solita per gli operatori di momento angolare sulla base $\{|jm\rangle\}$, dove

$$j = \frac{n_1 + n_2}{2} \quad \text{e} \quad m = \frac{n_1 - n_2}{2}, \quad m = -j, \dots, j \quad (4.6)$$

Notiamo subito che, essendo n_1 ed n_2 numeri interi, j e m sono seminteri come si richiede agli autovalori del momento angolare. Inoltre, per j fissato, m può assumere solo valori compresi tra $-j$ e j : questo segue dal fatto che n_1 ed n_2 sono positivi, e i due casi corrispondono alle due eventualità $n_1 = 0$ ed $n_2 = 0$.

Queste relazioni, in quello che viene detto *formalismo di Schwinger* per l'oscillatore armonico [24], ci permettono quindi di definire uno spazio tridimensionale astratto nel quale il nostro sistema è matematicamente equivalente ad un rotatore quantistico. Notiamo anche che in questo modo potremmo trattare un eventuale sistema composto da diverse coppie di bracci con il noto approccio della somma di momenti angolari.

In conclusione, osserviamo che ogni $\mathcal{F}^{(n)}$ è invariante rispetto al seguente insieme di operatori:

$$\{N, N_1, N_2, J_+, J_-, J_x, J_y, J_z, J^2\} \quad (4.7)$$

Notiamo anche che N commuta con tutte le osservabili fisiche del sistema (cioè, nel nostro quadro semplificato, tutto quello che è possibile costruire a partire da N_1 e N_2), e perciò costituisce una *carica di superselezione*: gli $\mathcal{F}^{(n)}$ sono quindi settori di superselezione.

Spazi $\mathcal{F}^{(n)}$ nell'isomorfismo con $\mathbb{C}^{n+1}$. Concentriamoci ora su un fissato $\mathcal{F}^{(n)}$, che come già detto risulta $(n+1)$ -dimensionale (e isomorfo a $\mathbb{C}^{n+1}$). La base standard per $\mathcal{F}^{(n)}$ è

$$\mathcal{B}^{(n)} = \{|n0\rangle, |(n-1)1\rangle, \dots, |1(n-1)\rangle, |0n\rangle\}$$

ma, dal momento che n è fissato, possiamo definire $k := n_2$ e scrivere in maniera semplificata $|n-k, k\rangle \equiv |k\rangle$, con $k = 0, 1, \dots, n$. Allora

$$\mathcal{B}^{(n)} = \{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n-1\rangle, |n\rangle\}$$

Attraverso l'isomorfismo unitario $\mathcal{F}^{(n)} \equiv \mathbb{C}^{n+1}$, possiamo identificare $\mathcal{B}^{(n)}$ con la base standard di $\mathbb{C}^{n+1}$. Precisamente, per ogni $|k\rangle$, con $k = 0, 1, \dots, n$, avremo l'identificazione unitaria

$$\mathcal{F}^{(n)} \ni |k\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n+1} \quad \leftarrow (k+1)\text{-esimo posto}$$

Ricordiamo che n e k sono legati ai numeri quantici (j, m) attraverso (4.6), in modo che

$$j = \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad m = \frac{n}{2} - k \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, n$$

Ora, visto che $\mathcal{F}^n$ è stabile sotto gli operatori in (4.7), siamo portati a considerare la loro restrizione a questo sottospazio di $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$: in particolare,

possiamo scrivere la loro rappresentazione matriciale nella base $\mathcal{B}^{(n)} = \{|k\rangle : k = 0, 1, \dots, n\}$. Ovviamente

$$N^{(n)} = n\mathbb{I}_{\mathbb{C}^{n+1}} \quad J^{2(n)} = \hbar^2 \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{n+1}}$$

e per $J_x^{(n)}, J_y^{(n)}, J_z^{(n)}, J_+^{(n)}, J_-^{(n)}$ abbiamo le solite matrici $(2j+1) \times (2j+1) = (n+1) \times (n+1)$ per un sistema con $j = n/2$. In particolare, J_+ (rispettivamente, J_-) ci permette di passare da un certo vettore della base standard al precedente (successivo):

$$\begin{aligned} J_+^{(n)}|k\rangle &= \hbar\sqrt{k(n-k+1)}|k-1\rangle \\ J_-^{(n)}|k\rangle &= \hbar\sqrt{(k+1)(n-k)}|k+1\rangle \end{aligned}$$

con

$$J_+^{(n)}|0\rangle = \underline{0} \quad \text{e} \quad J_-^{(n)}|n\rangle = \underline{0}$$

Di modo che $J_+^{(n)}$ e $J_-^{(n)}$ si comportano come una sorta di operatori di creazione-annichilazione “troncati” a $\mathbb{C}^{n+1}$. In questo contesto, anticipiamo la connessione con la teoria del quantum computing sottolineando la corrispondenza del quadro che stiamo sviluppando con i risultati emergenti dal lavoro di Cattaneo e altri [5].

4.2 Realizzazione dell'interferometro nella rappresentazione dual-rail

4.2.1 Realizzazione del beamsplitter

Figura 4.2: beamsplitter.

Seguendo alcuni lavori disponibili in letteratura [27, 4], deriviamo una realizzazione dell'azione del beamsplitter nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Cominciamo con alcune considerazioni fisiche, e dimostrando un teorema che ci sarà utile non solo in questo contesto.

Natura fisica del beamsplitter.

Fisicamente, i due caratteri principali dei segnali luminosi che si propagano all'interno dell'interferometro sono la *intensità* della luce e la *direzione di propagazione*. Abbiamo già detto che la seconda caratteristica è quella che formalmente divide il sistema ottico in due *bracci*; possiamo invece associare l'intensità al numero di fotoni presenti in ciascun braccio. Dal punto di vista pratico, un beamsplitter ideale di trasmittanza T^2 e riflettanza $R^2 = 1 - T^2$ è un dispositivo a due ingressi e due uscite che trasforma un raggio in ingresso di intensità I (diciamo nel braccio numero 1) in due raggi in uscita, di intensità $I \cdot T^2$ (nel braccio 1) e $I \cdot R^2$ (nel braccio 2).

Una decomposizione delle matrici di $SU(2)$.

Teorema 4.2.1 Sia $U \in SU(2)$, e sia $\mathcal{D}^{(j)}(\vec{n}, \vartheta)$ la rappresentazione irriducibile $2j + 1$ -dimensionale dell'operatore che realizza in $\mathcal{H}$ una rotazione di un angolo ϑ attorno al versore $\vec{n}$. Allora esistono quattro numeri reali α, β, γ e δ tali che

$$U = e^{i\alpha} \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{e}_z, \beta) \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{e}_y, \gamma) \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{e}_z, \delta)$$

Dimostrazione. È sempre possibile scrivere U come

$$U = \begin{pmatrix} ae^{i\varphi_a} & -be^{i\varphi_b} \\ ce^{i\varphi_c} & de^{i\varphi_d} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

per opportuni $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ e $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d \in [0, 2\pi)$. Esprimiamo il fatto che U sia unitaria imponendo che $U^\dagger U = \mathbb{I}$:

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & -abe^{i(\varphi_b - \varphi_a)} + cde^{i(\varphi_d - \varphi_c)} \\ -abe^{i(\varphi_a - \varphi_b)} + cde^{i(\varphi_c - \varphi_d)} & b^2 + d^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nel dettaglio, otteniamo le condizioni

$$a^2 + c^2 = 1 \quad (4.9a)$$

$$b^2 + d^2 = 1 \quad (4.9b)$$

$$ab = cd \quad (4.9c)$$

$$\varphi_b - \varphi_a = \varphi_d - \varphi_c \quad (4.9d)$$

Operiamo ora alcuni cambi di variabile. Per (4.9a) e (4.9b) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} a &= \cos(\gamma/2) & c &= \sin(\gamma/2) \\ b &= \sin(\gamma'/2) & d &= \cos(\gamma'/2) \end{aligned}$$

con $0 \leq \gamma, \gamma' \leq \pi$ poiché $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$, e grazie a (4.9c)

$$\cos(\gamma/2) \sin(\gamma'/2) = \sin(\gamma/2) \cos(\gamma'/2)$$

Da cui $\gamma = \gamma' + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e quindi possiamo porre

$$\gamma = \gamma'$$

Definiamo anche

$$\begin{aligned}\alpha &:= \frac{1}{4}(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) \\ \beta &:= \frac{1}{2}(-\varphi_a - \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) \\ \delta &:= -\varphi_a + \varphi_b \\ \delta' &:= -\varphi_c + \varphi_d\end{aligned}$$

da cui, invertendo, troviamo

$$\begin{aligned}\varphi_a &= \alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2} \\ \varphi_b &= \alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2} \\ \varphi_c &= \alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\delta'}{2} \\ \varphi_d &= \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\delta'}{2}\end{aligned}$$

Imponendo (4.9d) otteniamo

$$\delta = \delta'$$

Riassumiamo quanto fin qui ottenuto scrivendo la più generale matrice unitaria 2×2 come

$$U = \begin{pmatrix} e^{i(\alpha-\beta/2-\delta/2)} \cos(\gamma/2) & -e^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)} \sin(\gamma/2) \\ e^{i(\alpha+\beta/2-\delta/2)} \sin(\gamma/2) & e^{i(\alpha+\beta/2+\delta/2)} \cos(\gamma/2) \end{pmatrix}$$

da cui, tenendo conto che

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{e}_y, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) & -\sin(\vartheta/2) \\ \sin(\vartheta/2) & \cos(\vartheta/2) \end{pmatrix}$$

e che

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{e}_z, \vartheta) = \begin{pmatrix} e^{-i(\vartheta/2)} & 0 \\ 0 & e^{i(\vartheta/2)} \end{pmatrix}$$

abbiamo la tesi. □

Osservazione 4.2.2 Se $\alpha = 0$, allora U è il prodotto di tre rotazioni (e quindi una rotazione a sua volta).

Osservazione 4.2.3 Una decomposizione analoga vale con rotazioni attorno a due direzioni qualunque, purché distinte. Siano $\vec{n}$ e $\vec{m}$ due versori tridimensionali linearmente indipendenti: allora esistono quattro angoli α , β , γ e δ tali che

$$U = e^{i\alpha} \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \beta) \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{m}, \gamma) \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \delta)$$

Corollario 4.2.4 Sia $U \in SU(2)$. Allora esistono tre matrici unitarie A , B e C tali che $ABC = \mathbb{I}$ e $U = e^{i\alpha} A\sigma_x B\sigma_x C$, dove α è una fase globale e σ_x , σ_y e σ_z sono le matrici di Pauli.

Dimostrazione. Mantenendo le notazioni del teorema precedente, e definendo per comodità $R_x(\vartheta) = \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{e}_x, \vartheta)$, $R_y(\vartheta) = \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{e}_y, \vartheta)$ e $R_z(\vartheta) = \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{e}_z, \vartheta)$, poniamo

$$\begin{aligned} A &:= R_z(\beta) R_y\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ B &:= R_y\left(-\frac{\gamma}{2}\right) R_z\left(-\frac{\delta + \beta}{2}\right) \\ C &:= R_z\left(\frac{\delta - \beta}{2}\right) \end{aligned}$$

Notiamo che

$$ABC = R_z(\beta) R_y\left(\frac{\gamma}{2}\right) R_y\left(-\frac{\gamma}{2}\right) R_z\left(-\frac{\delta + \beta}{2}\right) R_z\left(\frac{\delta - \beta}{2}\right) = \mathbb{I}$$

Ora osserviamo che, semplicemente eseguendo la moltiplicazione tra matrici

$$\begin{aligned} \sigma_x R_y(\vartheta) \sigma_x &= R_y(-\vartheta) \\ \sigma_x R_z(\vartheta) \sigma_x &= R_z(-\vartheta) \end{aligned}$$

Di conseguenza, ricordando anche che $\sigma_x^2 = \mathbb{I}$, possiamo scrivere

$$\sigma_x B \sigma_x = \sigma_x R_y\left(-\frac{\gamma}{2}\right) \sigma_x \sigma_x R_z\left(-\frac{\delta + \beta}{2}\right) \sigma_x = R_y\left(\frac{\gamma}{2}\right) R_z\left(\frac{\delta + \beta}{2}\right)$$

Quindi

$$\begin{aligned} A \sigma_x B \sigma_x C &= R_z(\beta) R_y\left(\frac{\gamma}{2}\right) R_y\left(\frac{\gamma}{2}\right) R_z\left(\frac{\delta + \beta}{2}\right) R_z\left(\frac{\delta - \beta}{2}\right) \\ &= R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta) \end{aligned}$$

Dunque, come richiesto, $U = e^{i\alpha} A\sigma_x B\sigma_x C$ e $ABC = \mathbb{I}$. □

Trasformazione degli operatori di creazione e annichilazione.

Consideriamo ora un generico elemento del circuito a due ingressi e due uscite. A questo elemento sarà associato un operatore di evoluzione temporale

(unitario) U_{BS} che descrive il cambiamento del sistema a seguito dell'interazione con esso. Nella descrizione di Heisemberg, questo significa che gli operatori di creazione e annichilazione "in ingresso" a e $a^\dagger$ vengono trasformati in opportuni operatori "in uscita" b e $b^\dagger$ definiti da

$$\begin{aligned} b_1 &:= U_{BS}^\dagger a_1 U_{BS} & b_2 &:= U_{BS}^\dagger a_2 U_{BS} \\ b_1^\dagger &:= U_{BS}^\dagger a_1^\dagger U_{BS} & b_2^\dagger &:= U_{BS}^\dagger a_2^\dagger U_{BS} \end{aligned}$$

dove, per l'unitarietà di U_{BS} , $b_1^\dagger$ (rispettivamente, $b_2^\dagger$) è l'aggiunto di b_1 (b_2). Ipotizziamo ora che:

(i) esista una matrice B tale che

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

con $B_{ij} = |B_{ij}|e^{i\varphi_{ij}}$, e

(ii) b_i e $b_i^\dagger$ siano ancora una realizzazione delle CCR secondo Fock, ovvero

$$[b_i, b_j] = \delta_{ij}$$

Osserviamo intanto che (4.10) comporta

$$\begin{pmatrix} b_1^\dagger \\ b_2^\dagger \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* \\ B_{21}^* & B_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \end{pmatrix}$$

e che la condizione (ii) implica

$$|B_{11}|^2 + |B_{12}|^2 = 1 \quad (4.11a)$$

$$|B_{21}|^2 + |B_{22}|^2 = 1 \quad (4.11b)$$

$$B_{11}B_{21}^* + B_{12}^*B_{22} = 0 \quad (4.11c)$$

Infatti

$$\begin{aligned} [b_1, b_1^\dagger] &= |B_{11}|^2 a_1 a_1 + B_{11}B_{12}^* a_1 a_2^\dagger + B_{12}B_{11}^* a_2 a_1^\dagger + |B_{12}|^2 a_2 a_2^\dagger + \\ &\quad - |B_{11}|^2 a_1^\dagger a_1 - B_{11}^* B_{12} a_1^\dagger a_2 - B_{12}^* B_{11} a_2^\dagger a_1 - |B_{12}|^2 a_2^\dagger a_2 \\ &= |B_{11}|^2 + |B_{12}|^2 \\ [b_2, b_2^\dagger] &= |B_{21}|^2 a_1 a_1 + B_{21}B_{22}^* a_1 a_2^\dagger + B_{22}B_{21}^* a_2 a_1^\dagger + |B_{22}|^2 a_2 a_2^\dagger + \\ &\quad - |B_{21}|^2 a_1^\dagger a_1 - B_{21}^* B_{22} a_1^\dagger a_2 - B_{22}^* B_{21} a_2^\dagger a_1 - |B_{22}|^2 a_2^\dagger a_2 \\ &= |B_{21}|^2 + |B_{22}|^2 \\ [b_1, b_2^\dagger] &= B_{11}B_{21}^* a_1 a_1^\dagger + B_{11}B_{22}^* a_1 a_2^\dagger + B_{12}B_{21}^* a_2 a_1^\dagger + B_{12}B_{22}^* a_2 a_2^\dagger + \\ &\quad - B_{21}^* B_{11} a_1^\dagger a_1 - B_{21}^* B_{12} a_1^\dagger a_2 - B_{22}^* B_{11} a_2^\dagger a_1 - B_{22}^* B_{12} a_2^\dagger a_2 \\ &= B_{11}B_{21}^* + B_{12}B_{22}^* \end{aligned}$$

L'eguaglianza (4.11c) può essere riscritta, in termini di moduli e di fasi,

$$|B_{11}||B_{21}|e^{i(\varphi_{11}-\varphi_{21})} = |B_{12}||B_{22}|e^{i(\varphi_{12}-\varphi_{22})}$$

e quindi

$$\begin{aligned} |B_{11}||B_{21}| &= |B_{12}||B_{22}| \\ \varphi_{11} - \varphi_{12} &= \varphi_{21} - \varphi_{22} \pm \pi \end{aligned}$$

Elevando al quadrato la prima di queste eguaglianze e sostituendo da (4.11a) e (4.11b) otteniamo

$$\begin{aligned} |B_{22}|^2 &= |B_{11}|^2|B_{21}|^2 + |B_{11}|^2|B_{22}|^2 = |B_{11}|^2 \\ |B_{21}|^2 &= |B_{12}|^2|B_{22}|^2 + |B_{12}|^2|B_{21}|^2 = |B_{12}|^2 \end{aligned}$$

Possiamo ora definire *trasmissione* T^2 e *riflettanza* R^2 dell'elemento circuitale:

$$\begin{aligned} T^2 &:= |B_{11}|^2 = |B_{22}|^2 \\ R^2 &:= |B_{12}|^2 = |B_{21}|^2 \end{aligned}$$

con T e R numeri reali non negativi; da (4.11a) e (4.11b) ricaviamo immediatamente

$$T^2 + R^2 = 1$$

Introducendo il parametro angolare

$$\vartheta := \arccos(T), \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

e le fasi

$$\begin{aligned} \varphi_T &:= \frac{1}{2}(\varphi_{11} - \varphi_{22}) \\ \varphi_R &:= \frac{1}{2}(\varphi_{12} - \varphi_{21} \mp \pi) \\ \varphi_0 &:= \frac{1}{2}(\varphi_{11} + \varphi_{22}) \end{aligned}$$

possiamo riscrivere B come

$$B(\vartheta, \varphi_T, \varphi_R, \varphi_0) = e^{i\varphi_0} \begin{pmatrix} \cos \vartheta e^{i\varphi_T} & \sin \vartheta e^{i\varphi_R} \\ -\sin \vartheta e^{-i\varphi_R} & \cos \vartheta e^{-i\varphi_T} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Notiamo subito che

$$\det(B) = e^{2i\varphi_0}$$

e che

$$\begin{aligned} b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2 &= |B_{11}|^2 a_1^\dagger a_1 + B_{11}^* B_{12} a_1^\dagger a_2 + B_{12}^* B_{11} a_2^\dagger a_1 + |B_{12}|^2 a_2^\dagger a_2 + \\ &\quad + |B_{21}|^2 a_1^\dagger a_1 + B_{21}^* B_{22} a_1^\dagger a_2 + B_{22}^* B_{21} a_2^\dagger a_1 + |B_{22}|^2 a_2^\dagger a_2 \\ &= a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 \end{aligned}$$

Ovvero: se definiamo

$$\begin{aligned} N_1^{\text{in}} &:= a_1^\dagger a_1 & N_2^{\text{in}} &:= a_2^\dagger a_2 \\ N_1^{\text{out}} &:= b_1^\dagger b_1 & N_2^{\text{out}} &:= b_2^\dagger b_2 \end{aligned}$$

questi operatori sono interpretabili come le osservabili numero di fotoni in ingresso e in uscita nei rispettivi bracci, e

$$N_1^{\text{in}} + N_2^{\text{in}} = N_1^{\text{out}} + N_2^{\text{out}}$$

Inoltre, per la linearità della trasformazione, la condizione $a_i|\psi\rangle = \underline{0}$ ($i = 1, 2$) implica $b_j|\psi\rangle = \underline{0}$ ($j = 1, 2$). Riassumendo, dalle due condizioni espresse prima abbiamo ricavato

- (i) $B \in SU(2)$;
- (ii) la trasformazione conserva il numero totale di fotoni (e quindi l'energia);
- (iii) la trasformazione non cambia lo stato di vuoto, che quindi possiamo indicare con $|00\rangle$ senza possibilità di fraintendimenti.

Notiamo anche che, visto che $B \in SU(2)$, possiamo applicare la decomposizione del teorema 4.2.1 e scrivere

$$\begin{aligned} B(\vartheta, \varphi_T, \varphi_R, \varphi_0) &= e^{i\varphi_0} \begin{pmatrix} \cos(-\vartheta)e^{i\varphi_T} & -\sin(-\vartheta)e^{i\varphi_R} \\ \sin(-\vartheta)e^{-i\varphi_R} & \cos(-\vartheta)e^{-i\varphi_T} \end{pmatrix} = \\ &= e^{i\alpha} \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{e}_z, \beta) \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{e}_y, \gamma) \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{e}_z, \delta) \end{aligned}$$

dove, ricordando che il segno meno richiesto davanti all'elemento in alto a destra di (4.8) ci costringe a scrivere $B_{12} = -|B_{12}|e^{i(\varphi_{12} \pm \pi)}$,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4}(\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{21} + \varphi_{22}) = \frac{1}{4}\varphi_0 \\ \beta &= \frac{1}{2}(-\varphi_{11} - (\varphi_{12} \pm \pi) + \varphi_{21} + \varphi_{22}) = \varphi_R + \varphi_T \\ \gamma &= -2\vartheta = -2 \arccos(|B_{11}|) \\ \delta &= \varphi_{12} - \varphi_{11} = \varphi_R - \varphi_T \end{aligned}$$

Ora concentriamoci sul più semplice tipo di matrice B non banale, che possiamo scrivere come

$$B' = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

La decomposizione del teorema 4.2.1 diventa

$$B' = \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{e}_y, -2\vartheta)$$

Esplicitamente, questa matrice induce la trasformazione

$$\begin{cases} b_1 = \cos \vartheta a_1 + \sin \vartheta a_2 \\ b_2 = -\sin \vartheta a_1 + \cos \vartheta a_2 \end{cases} \quad (4.14)$$

Definiamo i vettori

$$\begin{aligned} |a; n_1 n_2\rangle &:= \frac{(a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}} |00\rangle \\ |b; n_1 n_2\rangle &:= \frac{(b_1^\dagger)^{n_1} (b_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}} |00\rangle \end{aligned}$$

e ipotizziamo di avere $|a; n0\rangle$ come stato in ingresso. Questo significa avere in ingresso n fotoni sul primo braccio, e zero sul secondo: siamo interessati al valore d'aspettazione di N_1^{out} e N_2^{out} . Invertendo (4.14) otteniamo

$$\begin{cases} a_1 = \cos \vartheta b_1 - \sin \vartheta b_2 \\ a_2 = \sin \vartheta b_1 + \cos \vartheta b_2 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} |a; n0\rangle &= \frac{(\cos \vartheta b_1^\dagger - \sin \vartheta b_2^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |00\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{n!}{(n-k)!k!} (-1)^k \cos^{n-k} \vartheta \sin^k \vartheta (b_1^\dagger)^{n-k} (b_2^\dagger)^k |00\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!k!}} (-1)^k \cos^{n-k} \vartheta \sin^k \vartheta |b; (n-k)k\rangle \end{aligned}$$

Ricordando che

$$N_1^{\text{out}} |b; (n-k)k\rangle = (n-k) |b; (n-k)k\rangle$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \langle a; n0 | N_1^{\text{out}} | a; n0 \rangle &= \sum_{k=0}^n (n-k) \frac{n!}{(n-k)!k!} (-1)^k (\cos^2)^{n-k} \vartheta (\sin^2)^k \vartheta \\ &= n \cos^2 \vartheta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{[(n-1)-k]!k!} (-1)^k (\cos^2)^{(n-1)-k} \vartheta (\sin^2)^k \vartheta \\ &= n \cos^2 \vartheta [\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta]^{n-1} \\ &= n \cos^2 \vartheta = n \cdot T^2 \end{aligned} \quad (4.15a)$$

e

$$\begin{aligned} \langle a; n0 | N_2^{\text{out}} | a; n0 \rangle &= \langle a; n0 | (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 - b_1^\dagger b_1) | a; n0 \rangle \\ &= n - n \cos^2 \vartheta \\ &= n \sin^2 \vartheta = n \cdot R^2 \end{aligned}$$

Ma se il numero di fotoni corrisponde all'intensità del segnale, questi valori d'aspettazione sono proprio quelli che caratterizzano un beamsplitter ideale di trasmittanza T^2 e riflettanza R^2 : allora è ragionevole adottare (4.13) come modello matematico per l'azione di tale dispositivo. Notiamo che, in particolare, l'angolo ϑ associato ad un beamsplitter "standard" o 50 : 50 è $\vartheta = \pi/4$.

Legame tra U_{BS} e rotazioni.

Nel paragrafo precedente abbiamo stabilito di adottare la matrice $B' \in SU(2)$ definita da (4.13) come realizzazione dell'azione del beamsplitter sugli operatori di creazione e annichilazione. Vogliamo mostrare come è possibile visualizzare questa trasformazione come una rotazione in uno spazio tridimensionale.

La connessione cercata col gruppo delle rotazioni è fornita dagli operatori di momento angolare J_x , J_y e J_z , definiti da (4.3) e (4.4). Cominciamo definendo due nuovi operatori

$$A_{+1/2}^{(1/2)} := a_2 \quad A_{-1/2}^{(1/2)} := -a_1$$

Direttamente dalle definizioni di J_z e $J_{\pm}$, otteniamo

$$\begin{aligned} [J_z, A_q^{(1/2)}] &= \hbar q A_q^{(1/2)} \\ [J_{\pm}, A_q^{(1/2)}] &= \hbar \sqrt{\left(\frac{1}{2} \mp q\right) \left(\frac{1}{2} \pm q + 1\right)} A_{q\pm 1}^{(1/2)} \end{aligned}$$

e, di conseguenza, $A_{+1/2}^{(1/2)}$ e $A_{-1/2}^{(1/2)}$ sono le componenti di un tensore sferico irriducibile di rango $1/2$. Analizziamo come queste si trasformano sotto U_{BS} . Dal momento che

$$\begin{aligned} U_{BS}^{\dagger} a_1 U_{BS} &= \cos \vartheta a_1 + \sin \vartheta a_2 \\ U_{BS}^{\dagger} a_2 U_{BS} &= -\sin \vartheta a_1 + \cos \vartheta a_2 \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned} U_{BS}^{\dagger} a_2 U_{BS} &= \cos \vartheta a_2 + \sin \vartheta (-a_1) \\ U_{BS}^{\dagger} (-a_1) U_{BS} &= -\sin \vartheta a_2 + \cos \vartheta (-a_1) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} U_{BS}^{\dagger} \begin{pmatrix} A_{+1/2}^{(1/2)} \\ A_{-1/2}^{(1/2)} \end{pmatrix} U_{BS} &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{+1/2}^{(1/2)} \\ A_{-1/2}^{(1/2)} \end{pmatrix} \\ &= B' \begin{pmatrix} A_{+1/2}^{(1/2)} \\ A_{-1/2}^{(1/2)} \end{pmatrix} = \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{e}_y, -2\vartheta) \begin{pmatrix} A_{+1/2}^{(1/2)} \\ A_{-1/2}^{(1/2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Possiamo anche scrivere

$$U_{BS}^\dagger A_q^{(1/2)} U_{BS} = \sum_{q'=-1/2}^{+1/2} \mathcal{D}_{qq'}^{(1/2)}(\vec{e}_y, -2\vartheta) A_{q'}^{(1/2)}$$

e, ricordando che i $\mathcal{D}_{qq'}^{(1/2)}(\vec{e}_y, -2\vartheta)$ sono reali,

$$U_{BS}^\dagger A_q^{(1/2)} U_{BS} = \sum_{q'=-1/2}^{+1/2} \left(\mathcal{D}_{qq'}^{(1/2)}(\vec{e}_y, -2\vartheta) \right)^* A_{q'}^{(1/2)} \quad (4.16)$$

D'altra parte, è noto che se $T_q^{(k)}$ è un tensore sferico irriducibile di rango k e $\mathcal{D}(R)$ è l'operatore che realizza in $\mathcal{H}$ una rotazione R , allora

$$\mathcal{D}^\dagger(R) T_q^{(k)} \mathcal{D}(R) = \sum_{q'=-k}^k \left(\mathcal{D}_{qq'}^{(k)}(R) \right)^* T_{q'}^{(k)} \quad (4.17)$$

Confrontando (4.16) e (4.17), concludiamo che

$$\begin{aligned} U_{BS}(\vartheta) &= \mathcal{D}(\vec{e}_y, -2\vartheta) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} (2\vartheta) J_y \right] \\ &= \exp \left[\vartheta (a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

esattamente come ottenuto per altre vie da Ou [21]. In altri termini, l'azione del beamsplitter (di trasmittanza $T^2 = \cos^2 \vartheta$) è realizzata nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ dallo stesso operatore che realizza una rotazione di un angolo -2ϑ attorno all'asse y .

Considerando la restrizione di U_{BS} ad $\mathcal{F}^{(n)}$, possiamo scrivere

$$U_{BS}^{(n)}(\vartheta) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} (2\vartheta) J_y^{(n)} \right] = \mathcal{D}^{(j=n/2)}(\vec{e}_y, -2\vartheta)$$

dove $\mathcal{D}^{(j)}(\vec{n}, \alpha)$ denota la rappresentazione irriducibile $(2j+1)$ -dimensionale dell'operatore di rotazione $\mathcal{D}(\vec{n}, \alpha)$.

4.2.2 Realizzazione del phase shifter

L'azione di uno sfasatore situato nel primo braccio dell'interferometro è quella di moltiplicare lo stato d'ingresso per un fattore di fase $e^{i\Delta}$, dove Δ è proporzionale al numero di fotoni che attraversano il primo braccio. Il dispositivo può quindi essere associato all'operatore

$$U_{PS}(\varphi) = \exp[-i\varphi N_1]$$

Figura 4.3: phase shifter

dove φ è un parametro che per il momento consideriamo fissato. Usando (4.3b) possiamo scrivere anche

$$\begin{aligned} U_{PS}(\varphi) &= \exp \left\{ -i\varphi \frac{1}{2} [N + (N_1 - N_2)] \right\} = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \varphi \left(\frac{\hbar N}{2} + J_z \right) \right] \\ &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \varphi J_z \right] \exp \left[-i\frac{\varphi}{2} N \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato $[J_z, N] = 0$.

Legame tra U_{PS} e rotazioni.

Considerando la restrizione di U_{PS} ad $\mathcal{F}^{(n)}$, possiamo scrivere

$$U_{PS}^{(n)}(\varphi) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \varphi J_z^{(n)} \right] \exp \left[-i\frac{\varphi}{2} N^{(n)} \right] = e^{-i\frac{\varphi}{2} n} \mathcal{D}^{(j=n/2)}(\vec{e}_z, \varphi)$$

che, a meno di una fase globale, è la rappresentazione irriducibile $(n/2)$ -dimensionale di una rotazione di un angolo φ attorno all'asse z .

4.2.3 Realizzazione dello specchio

Una coppia di specchi opportunamente piazzati trasforma, ad esempio, fotoni che viaggiano lungo l'asse x dell'interferometro in fotoni che viaggiano lungo l'asse y , e vice versa. Poiché la direzione di propagazione della luce è quello che per definizione distingue i due bracci, il sistema di specchi effettua la trasformazione

$$U_M |k, l\rangle = |l, k\rangle \quad (4.20)$$

Considerando la restrizione di U_M ad $\mathcal{F}^{(n)}$, possiamo scrivere

$$U_M^{(n)} |k\rangle = |n - k\rangle \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Osserviamo subito che, ovviamente, U_M è autoaggiunto; inoltre

$$U_M^2 = \mathbb{I}$$

Figura 4.4: sistema di specchi.

e quindi

$$U_M^{-1} = U_M^\dagger = U_M$$

Notiamo anche una relazione che ci sarà utile in seguito: sotto la trasformazione unitaria U_M , un qualsiasi operatore lineare T trasforma secondo

$$T' := U_M T U_M^\dagger = U_M T U_M$$

nel senso che $T'(U_M|\psi\rangle) = U_M(T|\psi\rangle)$ per ogni $|\psi\rangle$. Se in particolare $T = T(1,2)$ è scritto in termini di operatori del tipo $Q_1 = Q \otimes \mathbb{I}$ e $Q_2 = \mathbb{I} \otimes Q$, allora la trasformazione appena descritta è realizzata da

$$T'(1,2) = T(2,1)$$

Infatti, se indichiamo con $P(k)$ il k -esimo proiettore in $\mathcal{H}_1$ o $\mathcal{H}_2$, per ogni T

$$\begin{aligned} T &= \sum c_{kl} |kl\rangle\langle kl| = \sum c_{kl} (|k\rangle\langle k| \otimes |l\rangle\langle l|) \\ &= \sum c_{kl} (|k\rangle\langle k| \otimes \mathbb{I}) \circ (\mathbb{I} \otimes |l\rangle\langle l|) = \sum c_{kl} P_1(k) P_2(l) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Quindi, in particolare, anche per gli operatori del tipo appena discusso

$$T(1,2) = \sum c_{kl} P_1(k) P_2(l)$$

e di conseguenza

$$T(2,1) = \sum c_{kl} P_2(k) P_1(l) = \sum c_{kl} |lk\rangle\langle lk|$$

D'altra parte,

$$T'(1,2) = U_M T(1,2) U_M^\dagger = \sum c_{kl} (U_M |kl\rangle) (\langle kl| U_M^\dagger) = \sum c_{kl} |lk\rangle\langle lk|$$

da cui deduciamo il risultato voluto.

Legame tra U_M e riflessioni.

Le proprietà dell'operatore U_M , assieme alle definizioni (4.3b), (4.4a) e (4.4b), implicano ovviamente che

$$U_M^\dagger \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} U_M = \begin{pmatrix} J_x \\ -J_y \\ -J_z \end{pmatrix}$$

così che U_M , visto come operatore di evoluzione temporale, induce una trasformazione che è interpretabile come una riflessione rispetto all'asse x .

Osservazione 4.2.5 Alternativamente al discorso presentato, avremmo potuto seguire la procedura sfruttata nel caso del beamsplitter, assumendo la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ come modello di specchio nel senso che

$$U_M^\dagger \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} U_M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Avremmo potuto quindi, secondo il teorema 4.2.1, decomporre M come

$$M = e^{i\pi/4} \mathcal{D}^{(1/2)} \left(\vec{e}_z, -\frac{\pi}{2} \right) \mathcal{D}^{(1/2)} (\vec{e}_y, \pi) \mathcal{D}^{(1/2)} (\vec{e}_z, \pi)$$

e infine trovare un modo adeguato per dedurre da questa espressione (aiutandoci, come nel caso precedente, con l'operatore tensoriale $A^{(1/2)}$) l'azione del sistema di specchi nello spazio tridimensionale definito grazie al formalismo di Schwinger. Riteniamo di aver scelto, evitando questa strada, la soluzione più chiara e più immediata.

4.2.4 Realizzazione dell'interferometro

L'azione dell'interferometro di Mach-Zehnder nel suo complesso è

$$U_{MZ} = U_{BS} U_M U_{PS} U_{BS}$$

Nel nostro caso, visto che da (4.18) otteniamo

$$U_M U_{BS}(\vartheta) U_M = U'_{BS}(\vartheta) = \exp \left[\vartheta (a_2^\dagger a_1 - a_2 a_1^\dagger) \right] = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} 2\vartheta J_y \right]$$

allora

$$\begin{aligned} U_{MZ}(\vartheta, \varphi) &= U_M U_M U_{BS} U_M U_{PS} U_{BS} = U_M U'_{BS} U_{PS} U_{BS} \\ &= U_M \exp \left[-\frac{i}{\hbar} 2\vartheta J_y \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \varphi J_z \right] \exp \left[-i \frac{\varphi}{2} N \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} 2\vartheta J_y \right] \\ &= \exp \left[-i \frac{\varphi}{2} N \right] U_M \exp \left[-\frac{i}{\hbar} 2\vartheta J_y \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \varphi J_z \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} 2\vartheta J_y \right] \\ &= \exp \left[-i \frac{\varphi}{2} N \right] U_M \mathcal{D}(\vec{n}, \varphi) \end{aligned} \quad (4.22)$$

dove abbiamo usato $U_M^2 = \mathbb{I}$, $[J_y, N] = [U_M, N] = 0$ e abbiamo definito

$$\vec{n} = (\sin 2\vartheta, 0, \cos 2\vartheta) \quad (4.23)$$

Considerando la restrizione a $\mathcal{F}^{(n)}$, abbiamo

$$U_{MZ}^{(n)} = e^{-i\frac{\varphi}{2}n} U_M \mathcal{D}^{(j=n/2)}(\vec{n}, \varphi)$$

Studiamo ora la (4.22) per due valori particolari di (ϑ, φ) che saranno di particolare interesse nel seguito.

Caso $\vartheta = \pi/4$, $\varphi = 0$. In questo caso vediamo subito che

$$U_{MZ}(\vartheta = \frac{\pi}{4}, \varphi = 0) = U_M \quad (4.24)$$

Caso $\vartheta = \pi/4$, $\varphi = \pi$. In questo caso, invece,

$$U_{MZ}(\vartheta = \frac{\pi}{4}, \varphi = \pi) = \exp\left[i\frac{\pi}{2}N\right] U_M \mathcal{D}(\vec{e}_x, \pi) \quad (4.25)$$

La prima cosa che osserviamo è che il ket $\mathcal{D}(\vec{e}_x, \pi)|jm\rangle$ è autostato dell'operatore $(-J_z)$ relativamente all'autovalore $m\hbar$ (oltre che, ovviamente, un autostato dell'operatore J^2 relativamente all'autovalore $j(j+1)\hbar^2$), e di conseguenza

$$\mathcal{D}(\vec{e}_x, \pi)|jm\rangle = c(j, m)|j, -m\rangle$$

Questo risulta ovvio se si ricorda che i J_i sono le componenti di un tensore cartesiano di rango 1; in alternativa è possibile fare il calcolo esplicito utilizzando il lemma di Baker-Hausdorff. In ogni caso,

$$\mathcal{D}(\vec{e}_x, \pi)J_z(\mathcal{D}(\vec{e}_x, \pi))^\dagger = -J_z$$

A questo punto scriviamo

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\vec{e}_x, \pi) &= \mathcal{D}(\vec{e}_z, -\frac{\pi}{2})\mathcal{D}(\vec{e}_y, \pi)\mathcal{D}(\vec{e}_z, \frac{\pi}{2}) \\ &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{\pi}{2}J_z\right]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\pi J_y\right]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{\pi}{2}J_z\right] \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} c(j, m) &= \langle j - m | \mathcal{D}(\vec{e}_x, \pi) | jm \rangle \\ &= \langle j - m | \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{\pi}{2}J_z\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\pi J_y\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{\pi}{2}J_z\right] | jm \rangle \\ &= e^{-i\pi m} \langle j - m | \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\pi J_y\right] | jm \rangle \end{aligned}$$

Ora ricordiamo una formula nota, dovuta a Wigner, di cui è possibile trovare una derivazione nel libro di Sakurai [23]:

$$\begin{aligned} \langle jm' | \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \beta J_y \right] | jm \rangle &= \sum_k (-1)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(j-k-m')!(k-m+m')!} \\ &\quad \times \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2j-2k+m-m'} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{2k-m+m'} \end{aligned}$$

dove si intende $0^0 = 1$ e la sommatoria in k è ristretta in modo che nessuno degli argomenti dei fattoriali nel denominatore sia negativo. Applicando questo risultato al nostro caso otteniamo:

$$\begin{aligned} c(j, m) &= (-1)^m \langle j-m | \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \pi J_y \right] | jm \rangle \\ &= (-1)^m (-1)^{j-m} = (-1)^j \end{aligned}$$

da cui

$$\langle j'm' | \mathcal{D}(\vec{e}_x, \pi) | jm \rangle = (-1)^j \delta_{j'j} \delta_{m'(-m)}$$

e quindi (dato che $j = n/2$)

$$\mathcal{D}(\vec{e}_x, \pi) = (-1)^{\frac{N}{2}} U_M$$

Inserendo quest'ultima espressione in (4.25) e ricordando che $U_M^2 = \mathbb{I}$ otteniamo infine

$$\begin{aligned} U_{MZ}(\vartheta = \frac{\pi}{4}, \varphi = \pi) &= \exp \left[i \frac{\pi}{2} N \right] U_M (-1)^{\frac{N}{2}} U_M \\ &= (-1)^N \mathbb{I} \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.3 Spazio di Fock a n fotoni

Ricapitolando i risultati fin qui ottenuti per le restrizioni a $\mathcal{F}^{(n)}$ dei vari operatori, per i singoli dispositivi ottici e per l'interferometro nel suo complesso abbiamo

$$U_{BS}^{(n)} = \exp \left[\frac{i}{\hbar} (2\vartheta) J_y^{(n)} \right] = \mathcal{D}^{(j=n/2)}(\vec{e}_y, -2\vartheta) \quad (4.27a)$$

$$U_{PS}^{(n)} = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \varphi J_z \right] \exp \left[-i \frac{\varphi}{2} N \right] = e^{-i \frac{\varphi}{2} n} \mathcal{D}^{(j=n/2)}(\vec{e}_z, \varphi) \quad (4.27b)$$

$$U_M^{(n)} |k\rangle = |n-k\rangle \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (4.27c)$$

$$U_{MZ}^{(n)} = e^{-i \frac{\varphi}{2} n} U_M \mathcal{D}^{(j=n/2)}(\vec{n}, \varphi) \quad (4.27d)$$

dove $\vec{n}$ è definito da (4.23).

Presentiamo ora esplicitamente due casi semplici: $\mathcal{F}^{(1)}$ e $\mathcal{F}^{(2)}$.

Spazio di Fock ad un fotone.

La base standard per $\mathcal{F}^1$ è $\mathcal{B}^{(1)} = \{|0\rangle, |1\rangle\}$: ovviamente $\mathcal{F}^{(1)}$ è isomorfo a $\mathbb{C}^2$ in modo che $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le rappresentazioni matriciali per l'azione dei singoli dispositivi ottici e di tutto l'interferometro sono

$$U_{BS}^{(1)}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$U_{PS}^{(1)}(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

$$U_M^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

$$U_{MZ}^{(1)}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \sin \vartheta e^{-i\varphi} (e^{i\varphi} - 1) & e^{-i\varphi} (\cos^2 \vartheta e^{i\varphi} + \sin^2 \vartheta) \\ e^{-i\varphi} (\sin^2 \vartheta e^{i\varphi} + \cos^2 \vartheta) & -\cos \vartheta \sin \vartheta e^{-i\varphi} (e^{i\varphi} - 1) \end{pmatrix}$$

In particolare,

$$U_{MZ}^{(1)}(\pi/4, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$U_{MZ}^{(1)}(\pi/4, \pi) = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Spazio di Fock a due fotoni

La base standard per $\mathcal{F}^{(2)}$ è $\mathcal{B}^{(2)} = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$; $\mathcal{F}^{(2)}$ è isomorfo a $\mathbb{C}^3$.

Non riportiamo la forma esplicita di $U_{MZ}(\vartheta, \varphi)$, la cui eccessiva complessità la priva di immediatezza visiva; riportiamo invece

$$U_{BS}^{(2)}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\vartheta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\vartheta & \frac{1}{2}(1 - \cos 2\vartheta) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\vartheta & \cos 2\vartheta & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\vartheta \\ \frac{1}{2}(1 - \cos 2\vartheta) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\vartheta & \frac{1}{2}(1 + \cos 2\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$U_{PS}^{(2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-2i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_M^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In particolare,

$$U_{MZ}^{(2)}(\pi/4, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_{MZ}^{(2)}(\pi/4, \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Capitolo 5

Porte quantistiche a fotoni ottici

Se pensiamo agli spazi di Fock introdotti nel capitolo 4, l'isomorfismo tra $\mathcal{F}^{(1)}$ e $\mathbb{C}^2$ ci induce a pensare che, almeno nell'ambito della nostra visione semplificata, un sistema ottico a due bracci composto da dispositivi liberi da fenomeni di assorbimento e usato con un singolo fotone possa servire alla realizzazione fisica di un qubit. Infatti possiamo vedere la base standard $\mathcal{B}^{(1)} = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ di $\mathcal{F}^{(1)}$ come una base computazionale: ricordiamo che questo, in termini concreti, significa associare lo stato $|0\rangle$ a un fotone che si propaga nella direzione x (primo braccio), e lo stato $|1\rangle$ a un fotone che si propaga nella direzione y (secondo braccio). Questa particolare codifica è anche detta *codifica spaziale*.

In questa sezione esporremo alcune idee generali secondo le quali è possibile realizzare delle porte quantistiche per questo tipo di qubit. La nostra discussione riguarderà tre porte particolarmente importanti: la porta di Hadamard, la porta $\pi/8$ e il controlled-NOT. Accenneremo inoltre ad alcuni aspetti fondamentali delle porte di tipo controlled, mentre per un discorso più approfondito rimandiamo al testo di Nielsen e Chuang [18] e alla relativa bibliografia.

5.1 Porta $\pi/8$

5.1.1 Definizione

Figura 5.1: Porta $\pi/8$.

Questa porta, indicata col simbolo T e disegnata come in figura 5.1, si rappresenta sulla base computazionale con la matrice unitaria

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

5.1.2 Realizzazione fisica

Se siamo in grado di provvedere uno sfasatore per il nostro circuito ottico, T è sicuramente la porta di più facile realizzazione: infatti non si tratta di altro che di un phase shifter col parametro φ opportunamente fissato a $\pi/4$. Infatti, utilizzando (4.29) vediamo che in $\mathcal{F}^{(1)}$ l'azione del circuito riportato

Figura 5.2: Circuito che implementa la porta $\pi/8$.

in figura 5.2 è

$$U = U_{PS}^{(1)}(\pi/4) = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è la porta $\pi/8$ a meno di una fase irrilevante.

Più in generale, l'azione del circuito di figura 5.2 è realizzata nello spazio $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ da

$$\begin{aligned} U_{\pi/8} &= U_{PS}(\pi/4) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \frac{\pi}{4} J_z \right] \exp \left[-i \frac{\pi}{8} N \right] \\ &= \exp \left[-i \frac{\pi}{8} N \right] \mathcal{D}(\vec{e}_z, \pi/4) \end{aligned}$$

5.2 Porta di Hadamard

5.2.1 Definizione

Figura 5.3: Porta di Hadamard.

Questa porta, indicata col simbolo H e disegnata come in figura 5.3, si rappresenta sulla base computazionale con la matrice unitaria

$$H := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Viene anche chiamata “radice quadrata di NOT” per la sua proprietà di mandare entrambi gli stati della base computazionale in stati che, in una qualche misura, possono essere considerati “a metà strada” tra $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Infatti

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned}$$

5.2.2 Realizzazione fisica

Figura 5.4: Circuito che implementa la porta di Hadamard.

La porta di Hadamard può essere realizzata con il circuito di figura 5.4, dove il beamsplitter è del tipo 50:50. Infatti, da (4.28) e (4.29) vediamo subito che l'azione del circuito riportato è

$$\begin{aligned} U &= U_{PS}^{(1)}(\pi)U_{BS}^{(1)}(\pi/4) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che è la porta di Hadamard a meno di una fase irrilevante.

Più in generale, l'azione del circuito di figura 5.4 è realizzata in $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ dall'operatore

$$\begin{aligned} U_H &= U_{PS}(\pi)U_{BS}(\pi/4) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\pi J_z\right] \exp\left[-i\frac{\pi}{2}N\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{\pi}{2}J_y\right] \\ &= \exp\left[-i\frac{\pi}{2}N\right] \mathcal{D}(\vec{e}_z, \pi) \mathcal{D}(\vec{e}_y, -\pi/2) \end{aligned}$$

5.3 Controlled-NOT

5.3.1 Definizione: operazioni controlled

Le operazioni “controlled”, o controllate, occupano una posizione centrale nella teoria della computazione (classica come quantistica). In questa sezione spiegheremo come sia possibile implementare complesse operazioni controllate a partire da operazioni elementari.

Figura 5.5: controlled-NOT.

Il controlled-NOT (CNOT) appartiene appunto a questa classe generale di trasformazioni, e ne è, per così dire, il prototipo. Il suo simbolo è riportato in figura 5.5. Precisamente, questa è una porta quantistica a due qubit, che chiamiamo $|c\rangle$ (*di controllo*) e $|t\rangle$ (*bersaglio*); rispetto alla base computazionale, l'azione del CNOT è data da

$$|c\rangle|t\rangle \rightarrow |c\rangle|t \oplus c\rangle$$

dove con $t \oplus c$ indichiamo l'operazione logica di OR esclusivo tra t e c . In altri termini, se il qubit di controllo è nello stato $|1\rangle$ allora il qubit bersaglio è invertito; altrimenti, il qubit bersaglio non viene toccato. Di conseguenza, nella base computazionale $|\text{controllo}, \text{bersaglio}\rangle$ la rappresentazione matriciale del CNOT è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

In generale, se U è un qualunque operatore unitario a singolo qubit, l'operazione di *controlled- U* è un'operazione a due qubit, di cui uno viene detto di controllo e l'altro bersaglio. Se il qubit di controllo è nello stato $|1\rangle$, allora U è applicata al qubit bersaglio; in caso contrario quest'ultimo viene lasciato inalterato. Scriviamo anche

$$|c\rangle|t\rangle \rightarrow |c\rangle U^c |t\rangle$$

e, graficamente, rappresentiamo la porta controlled- U come in figura 5.6.

Figura 5.6: controlled- U .

Per motivi che diverranno chiari in seguito, vogliamo mostrare che è possibile implementare la controlled- U per una generica U unitaria a un

Figura 5.7: controlled phase shift (sinistra) e circuito equivalente (destra) per due qubit.

qubit, usando soltanto operazioni a singolo qubit e la porta CNOT. Adotteremo una procedura divisa in due tempi, basata sulla decomposizione $U = e^{i\alpha}A\sigma_x B\sigma_x C$ del corollario 4.2.4.

Il primo passo è applicare la fase $e^{i\alpha}$ al qubit bersaglio, in maniera controllata dal qubit di controllo. Un circuito che implementa questa operazione usando solo una porta a singolo qubit è riportato a destra in figura 5.7. Per verificare questa affermazione, notiamo che l'effetto di questo circuito è

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, \quad |01\rangle \rightarrow |01\rangle, \quad |10\rangle \rightarrow e^{i\alpha}|10\rangle, \quad |11\rangle \rightarrow e^{i\alpha}|11\rangle$$

cioè esattamente quello che richiediamo alla porta controlled riportata a sinistra.

Possiamo ora completare la costruzione della controlled-U, come illustrato in figura 5.8. Per dimostrare che questo circuito è effettivamente una

Figura 5.8: Circuito che implementa l'operazione controlled-U per una U a singolo qubit. α, A, B e C soddisfano $U = e^{i\alpha}A\sigma_x B\sigma_x C$, $ABC = \mathbb{I}$.

implementazione della controlled-U, ricordiamo che (per il corollario 4.2.4) U può essere scritta come

$$U = e^{i\alpha}A\sigma_x B\sigma_x C$$

con A, B e C operazioni a singolo qubit tali che $ABC = \mathbb{I}$. Supponiamo ora che il qubit di controllo si trovi nello stato $|1\rangle$: allora sul secondo qubit viene eseguita l'operazione $e^{i\alpha}A\sigma_x B\sigma_x C = U$. Se, d'altra parte, il qubit di controllo si trova nello stato $|0\rangle$, allora al qubit bersaglio viene applicata $ABC = \mathbb{I}$, esattamente come richiesto.

Ora che abbiamo stabilito come operare sulla condizione che un singolo qubit si trovi nello stato $|1\rangle$, completiamo il discorso generalizzandolo.

Supponiamo di avere $n + k$ qubit, e un operatore unitario U a k qubit. L'operazione controlled- U è definita in questo caso da

$$C^n(U)|x_1x_2\dots x_n\rangle|\psi\rangle = |x_1x_2\dots x_n\rangle U^{x_1x_2\dots x_n}|\psi\rangle$$

dove $x_1x_2\dots x_n$ nell'esponentiale sta per il prodotto delle quantità $x_1, x_2, \dots, x_n$. Si dimostra che è possibile realizzare questo tipo di porta utilizzando soltanto U , porta di Hadamard, $\pi/8$ e controlled-NOT. In figura riportiamo il disegno per una controlled- U nel caso $n = 3, k = 2$.

Figura 5.9: controlled- U generalizzata ($n = 3, k = 2$).

Ovviamente, è possibile anche realizzare porte controlled per le quali i ruoli dei due possibili stati del qubit di controllo siano invertiti: porte, cioè, che trasformano i qubit bersaglio solo se tutti i qubit di controllo sono nello stato $|0\rangle$. Graficamente, rappresentiamo questo tipo di controllo con un piccolo cerchio (anziché con un pallino), come in figura 5.10.

Figura 5.10: Operazione controllata con una porta NOT che viene applicata al secondo qubit a condizione che il primo qubit sia nello stato $|0\rangle$.

5.3.2 Realizzazione fisica

La realizzazione fisica di questa porta presenta maggiori difficoltà rispetto ai due casi precedenti. Tuttavia, premettendo che un CNOT a fotoni ottici a codifica spaziale è stato recentemente sviluppato sia su scala macroscopica [19] che come circuito integrato [22], ci limitiamo a proporre le linee guida di uno degli approcci possibili in modo idealizzato e svincolato dai dettagli pratici. In particolare, facciamo riferimento a una collaborazione che è in corso con il LENS di Firenze, finalizzata allo sviluppo di sistemi per quantum metrology e quantum computing, e che sta indagando nella direzione che nelle prossime righe accenniamo appena (per una rassegna delle tecniche sperimentali sulle quali si sta lavorando, si veda la bibliografia [17, 1, 8, 13]).

Consideriamo un setup sperimentale come quello mostrato in figura 5.11 (dove i beamsplitter sono del tipo 50 : 50) e concentriamoci sul sottosistema costituito dalle linee “bersaglio” indicate con T . MM è uno specchio mobile, ed è disposto in modo che in assenza di fotoni sulla linea di controllo C la

differenza di cammino ottico tra il percorso $(T_x \rightarrow MM \rightarrow T_y)$ e $(T_y \rightarrow FM \rightarrow T_x)$ sia modellizzabile introducendo uno sfasatore di parametro $\varphi = \pi$ tra il primo beamsplitter e MM . Lo specchio, inoltre, pur avendo una certa libertà di movimento è troppo pesante per risentire significativamente di eventuali effetti di rinculo dovuti all'urto di fotoni provenienti da una delle linee bersaglio. La linea di controllo è costruita - ad esempio, sfruttando adeguatamente le proprietà di una cavità elettromagnetica ad alto fattore di qualità per amplificare la pressione di radiazione - in modo che quando un fotone è presente su C lo specchio mobile si sposti, modificando il cammino ottico del percorso $(T_x \rightarrow MM \rightarrow T_y)$ esattamente della quantità richiesta per annullare lo sfasamento che prima era presente. In conclusione, il "sistema bersaglio" è in entrambi i casi equivalente a un interferometro di Mach-Zehnder come quello discusso nel capitolo 4, ma per due diversi valori del parametro di sfasamento φ :

- (i) $\varphi = \pi$ in assenza di fotoni sulla linea di controllo;
- (ii) $\varphi = 0$ quando un fotone è presente sulla linea di controllo.

Figura 5.11: schema essenziale di un CNOT a fotoni ottici.

D'altra parte, abbiamo già studiato il comportamento dell'interferometro (con $\vartheta = \pi/4$) nei due casi particolari $\varphi = \pi$ e $\varphi = 0$. In particolare, per il settore di superselezione $\mathcal{F}^{(1)}$ sul quale ci stiamo concentrando valgono

(4.31) e (4.32):

$$U_{MZ}^{(1)}(\pi/4, \pi) = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_{MZ}^{(1)}(\pi/4, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In termini più adatti al contesto della computazione quantistica, possiamo chiamare *qubit bersaglio* il qubit codificato nella luce che attraversa l'interferometro; diciamo inoltre che

- (i) quando nessun fotone è presente sulla linea di controllo, lo stato in ingresso del qubit bersaglio viene riportato, invariato a meno di una fase globale, in uscita;
- (ii) quando un fotone è presente sulla linea di controllo, al qubit bersaglio viene applicata la porta NOT.

Associando, infine, un qubit anche alla linea di controllo di modo che $|0\rangle$ rappresenti lo stato di vuoto e $|1\rangle$ la presenza di un fotone, e tenendo presente le avvertenze date all'inizio di questa sezione, possiamo affermare che il circuito di figura 5.11 rappresenta una realizzazione fisica della porta CNOT. Nella base $|\text{controllo}, \text{bersaglio}\rangle$ la rappresentazione matriciale dell'azione di questo circuito è quindi la (5.1).

Capitolo 6

Un insieme universale di porte quantistiche

È noto che, classicamente, un piccolo insieme (ad esempio AND, OR e NOT) di porte logiche può essere usato per calcolare una qualunque funzione logica. Esiste un simile risultato anche in computazione quantistica, dove un insieme di porte è detto *universale per la computazione quantistica* se ogni operazione unitaria può essere approssimata con precisione arbitraria da un circuito quantistico composto solo da queste porte. In questo capitolo daremo tre risultati di universalità con i quali dimostreremo che l'insieme composto da porta di Hadamard, porta $\pi/8$ e controlled-NOT è universale per la computazione quantistica.

Il primo risultato mostra che qualsiasi operatore può essere espresso esattamente come prodotto di operatori unitari che agiscono non banalmente solo sul sottospazio generato da due stati della base computazionale. Il secondo risultato utilizza il primo per mostrare che qualsiasi operatore unitario può essere espresso esattamente usando controlled-NOT e porte a singolo qubit. Il terzo combina il secondo con una dimostrazione che operazioni a singolo qubit possono essere approssimate con precisione arbitraria usando le porte di Hadamard e $\pi/8$.

6.1 Universalità delle porte unitarie a due livelli

Consideriamo una matrice unitaria U che agisce su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ di dimensione d . In questa sezione spieghiamo come U possa essere decomposta nel prodotto di *matrici unitarie a due livelli*, cioè matrici che agiscono in modo non banale solo su un sottospazio di dimensione non maggiore di 2. L'idea essenziale per questa decomposizione può essere compresa considerando

il caso in cui U sia una matrice 3×3 : scriviamo ad esempio

$$U = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix}$$

Troveremo tre matrici unitarie U_1 , U_2 e U_3 tali che

$$U_3 U_2 U_1 U = \mathbb{I} \quad (6.1)$$

Da questo seguirà che

$$U = U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger$$

dove $U_1^\dagger$, $U_2^\dagger$ e $U_3^\dagger$, in quanto inverse di matrici unitarie a due livelli, sono a loro volta unitarie a due livelli. Così, se dimostriamo (6.1), allora abbiamo mostrato come ridurre U al prodotto di matrici unitarie a due livelli.

Per costruire U_1 , usiamo questa procedura: se $b = 0$ allora poniamo

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

altrimenti, se $b \neq 0$

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{a^*}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & \frac{b^*}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & 0 \\ \frac{b}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & \frac{-a}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che in ogni caso U_1 è una matrice unitaria a due livelli, e che moltiplicandola a destra per U otteniamo

$$U_1 U = \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ 0 & e' & h' \\ c' & f' & j' \end{pmatrix}$$

dove non siamo interessati al valore particolare degli elementi primati: il punto cruciale è che l'elemento di mezzo della colonna a sinistra è zero.

Ora applichiamo una procedura analoga per trovare una matrice a due livelli U_2 tale che $U_2 U_1 U$ abbia uno zero nell'angolo in basso a sinistra. Se $c' = 0$ poniamo

$$U_2 = \begin{pmatrix} a'^* & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e se invece $c' \neq 0$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \frac{a'^*}{\sqrt{|a'|^2+|c'|^2}} & 0 & \frac{c'^*}{\sqrt{|a'|^2+|c'|^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c'}{\sqrt{|a'|^2+|c'|^2}} & 0 & \frac{-a'}{\sqrt{|a'|^2+|c'|^2}} \end{pmatrix}$$

In ogni caso, moltiplicando troviamo

$$U_2 U_1 U = \begin{pmatrix} 1 & d'' & g'' \\ 0 & e'' & h'' \\ 0 & f'' & j'' \end{pmatrix}$$

Ma dal momento che U , U_1 e U_2 sono unitarie, anche $U_2 U_1 U$ lo è, e quindi in particolare la sua prima riga deve avere norma 1: quindi $d'' = g'' = 0$. Ponendo

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e''^* & f''^* \\ 0 & h''^* & j''^* \end{pmatrix}$$

vediamo subito che $U_3 U_2 U_1 U = \mathbb{I}$, e quindi $U = U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger$, come richiesto.

Più in generale, supponiamo che U sia una matrice $d \times d$. Allora, analogamente a quanto fatto nel caso 3×3 , possiamo trovare $d-1$ matrici unitarie a due livelli $U_1, \dots, U_{d-1}$ tali che $U_{d-1} U_{d-2} \dots U_1 U$ abbia un 1 nell'angolo in alto a sinistra, e zeri su tutto il resto della prima colonna e della prima riga. Ripetiamo poi questa procedura per la sottomatrice unitaria $d-1 \times d-1$ che rimane nell'angolo in basso a destra di $U_{d-1} U_{d-2} \dots U_1 U$, e così via, ottenendo infine che una qualunque matrice unitaria $d \times d$ può essere scritta come

$$U = V_1 \dots V_k$$

dove le matrici V_i sono matrici unitarie a due livelli, e

$$k \leq (d-1) + (d-2) + \dots + 1 = \frac{1}{2} d(d-1)$$

6.2 Universalità di CNOT e porte a singolo qubit

Abbiamo appena mostrato che qualunque matrice unitaria $d \times d$ può essere scritta come prodotto di matrici unitarie a due livelli. Ora mostriamo che il controlled-NOT e le porte a singolo qubit, insieme, possono essere usate per implementare qualunque operazione unitaria a due livelli nello spazio degli stati di n qubit. Combinando questi risultati, vediamo che CNOT e porte a singolo qubit possono essere usati per implementare qualunque operazione unitaria su n qubit, e di conseguenza sono universali per la computazione quantistica.

Supponiamo che U sia una matrice unitaria a due livelli in un computer quantistico a n qubit. Supponiamo, in particolare, che U agisca non banalmente sullo spazio generato dagli stati $|s\rangle = |s_1 \dots s_n\rangle$ e $|t\rangle = |t_1 \dots t_n\rangle$ della base computazionale, dove $s_1 \dots s_n$ e $t_1 \dots t_n$ sono le espansioni binarie di s e t . Sia $\tilde{U}$ la sottomatrice non banale 2×2 di U ; $\tilde{U}$ può essere vista come un operatore unitario su un singolo qubit.

Il nostro primo obiettivo è costruire un circuito che implementi U a partire da porte a singolo qubit e da CNOT. Per fare questo, dobbiamo utilizzare

i *codici di Gray*. Consideriamo due diversi numeri binari, s e t . Un *codice di Gray* che collega s e t è una sequenza di numeri binari che comincia con s e finisce con t , tale che termini adiacenti nella lista differiscono esattamente per un bit.

Sia dunque $g_1 = s, \dots, g_m = t$ un codice di Gray che collega s e t . Notiamo che possiamo sempre trovare un codice di Gray tale che $m \leq n+1$, visto che s e t possono differire al più in n posizioni. L'idea fondamentale del circuito quantistico che implementa U è applicare una sequenza di porte che effettuino i cambiamenti di stato

$$|g_1\rangle \rightarrow |g_2\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |g_{m-1}\rangle$$

seguita da un'operazione controlled- $\tilde{U}$, con l'unico qubit dove g_{m-1} e g_m differiscono come qubit bersaglio, e infine invertire il primo passo trasformando

$$|g_{m-1}\rangle \rightarrow |g_{m-2}\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |g_1\rangle$$

Ciascuna di queste operazioni può essere facilmente implementata usando operazioni già sviluppate in questo e nel precedente capitolo, e il risultato finale è un'implementazione di U .

Una descrizione più precisa dell'implementazione è la seguente. Il primo passo è scambiare gli stati $|g_1\rangle$ e $|g_2\rangle$. Supponiamo che g_1 e g_2 differiscano nell' i -esima posizione: allora realizziamo lo scambio operando una negazione sull' i -esimo qubit, condizionale sul fatto che i valori degli altri qubit siano uguali a quelli comuni a g_1 e g_2 . Poi usiamo una simile operazione controllata per scambiare $|g_2\rangle$ e $|g_3\rangle$, e così via fino a che non scambiamo $|g_{m-2}\rangle$ con $|g_{m-1}\rangle$. Riassumiamo l'effetto di questa sequenza di $m-2$ operazioni come

$$\begin{aligned} |g_1\rangle &\rightarrow |g_{m-1}\rangle \\ |g_2\rangle &\rightarrow |g_1\rangle \\ |g_3\rangle &\rightarrow |g_2\rangle \\ &\dots \\ |g_{m-1}\rangle &\rightarrow |g_{m-2}\rangle \end{aligned}$$

e facciamo notare che tutti gli altri stati della base computazionale non sono modificati. Supponiamo ora che g_{m-1} e g_m differiscano nel j -esimo qubit. Applichiamo un'operazione controlled- $\tilde{U}$ col j -esimo qubit come bersaglio, condizionale sul fatto che i valori degli altri qubit coincidano con quelli comuni a g_m e g_{m-1} . Infine, concludiamo invertendo le operazioni di scambio: scambiamo $|g_{m-1}\rangle$ con $|g_{m-2}\rangle$, poi $|g_{m-2}\rangle$ con $|g_{m-3}\rangle$ e così via, fino a sostituire $|g_2\rangle$ con $|g_1\rangle$.

Un semplice esempio chiarisce molto questa procedura: supponiamo di voler implementare la trasformazione unitaria a due livelli

$$U = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

con a, b, c e d numeri complessi tali che $\tilde{U} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ è unitaria. Notiamo che U agisce non banalmente solo sugli stati $|000\rangle$ e $|111\rangle$. Scriviamo un codice di Gray che collega 000 e 111 :

A	B	C
0	0	0
0	0	1
0	1	1
1	1	1

Da questa deduciamo il circuito necessario, che riportiamo in figura 6.1. Le prime due porte scambiano $|000\rangle$ con $|011\rangle$. Successivamente, applichiamo l'operazione $\tilde{U}$ al primo qubit degli stati $|011\rangle$ e $|111\rangle$, richiedendo che il secondo e il terzo qubit siano nello stato $|11\rangle$. Infine, invertiamo le trasformazioni compiute all'inizio, assicurandoci che $|011\rangle$ venga riscambiato con $|000\rangle$.

Figura 6.1: Circuito che implementa la operazione unitaria a due livelli definita da (6.2).

6.3 Un insieme discreto e universale di operazioni

Nella sezione precedente abbiamo provato che $CNOT$ e porte unitarie a un qubit formano un insieme universale per la computazione quantistica. In questa sezione troveremo un insieme discreto di porte che gode della stessa proprietà.

6.3.1 Approssimazione degli operatori unitari

Ovviamente, un insieme discreto di porte non può servire ad implementare *esattamente* tutte le possibili operazioni unitarie, dal momento che l'insieme di queste operazioni è continuo: piuttosto, vedremo che un insieme discreto può essere usato per *approssimare* una qualunque operazione unitaria. Prima di arrivare a questo punto, però, è necessario chiarire cosa si intenda, in questo contesto, per approssimazione.

Consideriamo due operatori unitari U e V che agiscono sullo stesso spazio: immaginiamo che U sia l'operatore che intendiamo implementare, e che V sia quello implementato nella pratica. Definiamo l'*errore* quando V è implementato al posto di U come

$$E(U, V) = \max_{|\psi\rangle} \|(U - V)|\psi\rangle\|$$

dove il massimo è preso su tutti gli $|\psi\rangle$ normalizzati nello spazio in cui agiscono U e V . È possibile mostrare che questa definizione di errore ha l'interpretazione seguente: se $E(U, V)$ è piccolo, allora ogni misura effettuata sullo stato $V|\psi\rangle$ darà approssimativamente le stesse statistiche di una misura di $U|\psi\rangle$, per ogni $|\psi\rangle$ iniziale. Inoltre, se $V_1, \dots, V_m$ è una sequenza di porte che dovrebbe approssimare $U_1, \dots, U_m$, allora gli errori così definiti si sommano al più linearmente: in altri termini, vale la disuguaglianza

$$E(U_m U_{m-1} \dots U_1, V_m V_{m-1} \dots V_1) \leq \sum_{j=1}^m E(U_j, V_j) \quad (6.3)$$

6.3.2 Universalità di Hadamard, CNOT e $\pi/8$

Siamo ora in possesso di tutti gli strumenti necessari a studiare l'approssimazione di porte unitarie qualsiasi con un insieme discreto di porte. L'elemento mancante della costruzione è la dimostrazione di universalità secondo la quale la porta di Hadamard e la $\pi/8$ possono essere usate per approssimare una qualunque operazione unitaria a singolo qubit con precisione arbitraria.

Consideriamo le porte T e HTH . A meno di una fase irrilevante, T è la rappresentazione irriducibile bidimensionale di una rotazione di $\pi/4$ attorno all'asse z , mentre HTH è una rotazione di $\pi/4$ attorno all'asse x . Infatti

$$\begin{aligned} HTH &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{i\pi/8} \begin{pmatrix} \cos(\pi/8) & -i \sin(\pi/8) \\ -i \sin(\pi/8) & \cos(\pi/8) \end{pmatrix} \\ &= e^{i\pi/8} (\cos(\pi/8)\mathbb{I} - i \sin(\pi/8)\sigma_x) = e^{i\pi/8} \exp \left[-i \frac{\pi}{4} \frac{1}{2} \sigma_x \right] \end{aligned}$$

Componendo queste due operazioni e ricordando che $\sigma_z \sigma_x = i \sigma_y$ otteniamo, a meno di una fase,

$$\begin{aligned} THTH &= \exp \left[-i \frac{\pi}{4} \frac{1}{2} \sigma_z \right] \exp \left[-i \frac{\pi}{4} \frac{1}{2} \sigma_x \right] = \exp \left[-i \frac{\pi}{8} \sigma_z \right] \exp \left[-i \frac{\pi}{8} \sigma_x \right] \\ &= [\cos(\pi/8) \mathbb{I} - i \sin(\pi/8) \sigma_z] [\cos(\pi/8) \mathbb{I} - i \sin(\pi/8) \sigma_x] \\ &= \cos^2(\pi/8) \mathbb{I} - i \sin(\pi/8) [\cos(\pi/8) \sigma_x + \sin(\pi/8) \sigma_y + \cos(\pi/8) \sigma_z] \end{aligned}$$

Ora definiamo il vettore $\vec{v} := (\cos(\pi/8), \sin(\pi/8), \cos(\pi/8))$, e il versore $\vec{n} = \vec{v}/|\vec{v}|$. Introduciamo anche l'angolo $0 \leq \vartheta \leq \pi$ tale che $\cos(\vartheta/2) = \cos^2(\pi/8)$: osserviamo subito che è possibile dimostrare che ϑ , così definito, è un multiplo irrazionale di 2π . Proseguiamo notando che

$$\begin{aligned} \sin(\vartheta/2) &= \sqrt{1 - \cos^2(\vartheta/2)} \\ &= \sin(\pi/8) \sqrt{1 + \cos^2(\pi/8)} \\ &= \sin(\pi/8) |\vec{v}| \end{aligned}$$

Possiamo dunque riscrivere la trasformazione $THTH$ come

$$\begin{aligned} THTH &= \cos(\vartheta/2) \mathbb{I} - i |\vec{v}| \frac{\sin(\vartheta/2)}{|\vec{v}|} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \\ &= \cos(\vartheta/2) \mathbb{I} - i \sin(\vartheta/2) \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \\ &= \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \vartheta) \end{aligned}$$

cioè come la rappresentazione irriducibile bidimensionale di una rotazione di un angolo ϑ attorno a $\vec{n}$.

Ora mostriamo che, dato un angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$, per successive iterazioni di $\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \vartheta)$ possiamo approssimare $\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \alpha)$ con una precisione arbitraria. Infatti, per ogni $\delta > 0$ sia N un intero tale che

$$N > 2\pi/\delta$$

Per ogni $k \in \mathbb{Z}$, definiamo ϑ_k in modo che $\vartheta_k \in [0, 2\pi)$ e $\vartheta_k = (k\vartheta)_{\text{mod } 2\pi}$. Allora, dal momento che ϑ è un multiplo irrazionale di 2π , $\{\vartheta_k : k = 1, \dots, N\}$ è un insieme di N numeri distinti in $[0, 2\pi)$, e necessariamente esistono distinti $j, k \in \{1, \dots, N\}$ tali che

$$|\vartheta_k - \vartheta_j| \leq 2\pi/N < \delta$$

Senza perdere in generalità assumiamo che $k > j$: in questo modo $\vartheta_{k-j} < \delta$. Visto che $j \neq k$, deve essere $\vartheta_{k-j} \neq 0$. Dunque esiste un numero intero M tale che la sequenza degli intorno di raggio δ e centro $\vartheta_{l(k-j)}, l \in \{1, \dots, M\}$ è una copertura di $[0, 2\pi)$.

Sia ora $\varepsilon > 0$: prendendo $\delta = \varepsilon/3$, seguendo la procedura appena descritta ricaviamo k e j . Per ogni $l \in \mathbb{N}$, definiamo $n := l(k - j)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
 E\left(\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \alpha), \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \alpha + \eta)\right) &= \\
 &= \max_{|\psi\rangle} \left\| \left(\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \alpha) - \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \alpha + \eta) \right) |\psi\rangle \right\| \\
 &= \max_{|\psi\rangle} \left\| \exp\left[-i\frac{\alpha}{2}(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})\right] \left(\mathbb{I} - \exp\left[-i\frac{\eta}{2}(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})\right] \right) |\psi\rangle \right\| \\
 &= \max_{|\psi\rangle} \left\| \left(\mathbb{I} - \exp\left[-i\frac{\eta}{2}(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})\right] \right) |\psi\rangle \right\| \\
 &= \left| 1 - e^{\pm i\frac{\eta}{2}} \right| = 2 |\sin(\eta/2)|
 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 E\left(\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \alpha), \left(\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \vartheta)\right)^n\right) &= \\
 &= E\left(\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \alpha), \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, n\vartheta)\right) \\
 &= E\left(\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \alpha), \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \alpha + (n\vartheta - \alpha))\right) \\
 &= 2 \left| \sin\left(\frac{n\vartheta - \alpha}{2}\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{\vartheta n - \alpha}{2}\right) \right| \\
 &= 2 \left| \sin\left(\frac{\vartheta_{l(k-j)} - \alpha}{2}\right) \right| \\
 &\leq |\vartheta_{l(k-j)} - \alpha|
 \end{aligned}$$

Questa catena di relazioni è valida per ogni l ; d'altra parte, per quanto detto sopra è possibile trovare un $\tilde{l}$ (e un corrispondente $\tilde{n}$) tale che $|\vartheta_{l(k-j)} - \alpha| < \delta$. Ne segue che

$$E\left(\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \alpha), \left(\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \vartheta)\right)^{\tilde{n}}\right) < \delta = \frac{\varepsilon}{3} \quad (6.4)$$

Possiamo infine verificare che una qualunque operazione unitaria a singolo qubit può essere approssimata con una precisione arbitraria usando soltanto porte di Hadamard e $\pi/8$. Sia $\vec{w} := (-\cos(\pi/8), \sin(\pi/8), \cos(\pi/8))$, e $\vec{m} := \vec{w}/|\vec{w}|$. Con un po' di algebra, possiamo verificare che per ogni α

$$H\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \alpha)H = \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{m}, \alpha)$$

Per l'osservazione 4.2.3, a meno di una fase globale ogni U unitaria a singolo qubit può essere scritta, per opportuni β , γ e δ , come

$$U = \mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \beta)\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{m}, \gamma)\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \delta)$$

D'altra parte, mantenendo la notazione usata finora,

$$E\left(\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{m}, \alpha), \left(\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{m}, \vartheta)\right)^{\tilde{n}}\right) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (6.5)$$

e ricordando che $H^2 = \mathbb{I}$,

$$\left(\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{m}, \vartheta)\right)^{\tilde{n}} = H \left(\mathcal{D}^{(1/2)}(\vec{n}, \vartheta)\right)^{\tilde{n}} H$$

I risultati (6.4) e (6.5), assieme alla (6.3) implicano quindi che per opportuni numeri interi n_1, n_2 e n_3

$$E\left(U, (\mathcal{D}(\vec{n}, \vartheta))^{n_1} H (\mathcal{D}(\vec{n}, \vartheta))^{n_2} H (\mathcal{D}(\vec{n}, \vartheta))^{n_3}\right) < \varepsilon$$

In altri termini, fissato $\varepsilon > 0$ e data una qualsiasi porta U unitaria a singolo qubit, possiamo approssimare U entro un errore di ε usando un circuito composto soltanto da porte di Hadamard e porte $\pi/8$.

Come conseguenza di quanto appena dimostrato e tenendo conto di quanto detto in precedenza troviamo che è possibile approssimare ogni circuito quantistico a m porte nel seguente modo. Dato un circuito contenente m porte (CNOT oppure porte a singolo qubit) possiamo approssimarli usando Hadamard, CNOT e $\pi/8$; se vogliamo un'accuratezza di ε per l'intero circuito, allora possiamo approssimare ogni operazione a singolo qubit entro un errore di ε/m , e applicando (6.3) vediamo che la nostra richiesta è soddisfatta.

Capitolo 7

Conclusioni

Lo scopo del presente lavoro è stato quello di indagare alcune delle basi teoriche sulle quali potrebbe fondarsi la realizzazione di un calcolatore quantistico universale a fotoni ottici. Possiamo, in tutta ragionevolezza, ritenere di aver soddisfacentemente raggiunto questo obiettivo. Crediamo inoltre di avere, strada facendo, messo in luce alcuni aspetti formali particolarmente interessanti: ad esempio, l'approccio ai fenomeni quantistici di tipo oscillatorio e ondulatorio reso possibile dalla discussione approfondita delle relazioni di commutazione canoniche secondo Fock, o la costruzione (alla cui radice è il formalismo di Schwinger) che ci ha permesso di modellizzare l'azione dei dispositivi ottici in termini di rotazioni o riflessioni in uno spazio tridimensionale opportunamente introdotto.

Nonostante la strada da noi seguita costituisca per molti aspetti un compendio di risultati disponibili in letteratura, lo sforzo - in larga parte originale - impiegato per generalizzare i modelli fisici al caso di n fotoni (anziché limitarsi a uno solo) ci gratifica da due punti di vista: fornisce una maggior comprensione del quadro teorico (con il già citato modello “a rotazioni”) e suggerisce un collegamento con la teoria del quantum computing a molti valori logici. In particolare, chiarifica concettualmente come un modello “a due ingressi e due uscite” (cioè quello delle matrici unitarie 2×2 di trasformazione degli operatori di creazione e annichilazione dei due bracci) possa tradursi concretamente in termini di matrici di $\mathbb{C}^{n+1}$ per ciascun settore $\mathcal{F}^{(n)}$.

Nello sviluppo delle nostre argomentazioni, soprattutto nei capitoli 4 e 5, non abbiamo perso occasione di sottolineare la lontananza delle nostre preoccupazioni rispetto a quelle di chi, in laboratorio, lavora al raggiungimento delle altissime capacità tecniche richieste per il controllo degli stati quantistici. Ciononostante, ricordiamo che la via in questa direzione è già stata aperta, e che molte ricerche (compresa la già citata collaborazione col LENS di Firenze) oggi hanno tra i loro obiettivi tecnologie che ci avvicinano all'implementazione reale di circuiti quantistici a fotoni ottici. Ripetiamo, infine, di aver tralasciato gli aspetti della questione più strettamente legati alla scienza

dell'informazione, evitando ad esempio di porci domande sulla complessità computazionale delle costruzioni universali proposte nel capitolo 6.

Ulteriori sviluppi. La connessione che ci permette di passare dalla descrizione dei sistemi ottici in termini di matrici di $SU(2)$ a quella in termini di operatori sui settori $\mathcal{F}^{(n)}$ merita sicuramente di essere indagata più a fondo, e possibilmente sistematizzata sfruttando più direttamente l'isomorfismo locale tra $SU(2)$ e il gruppo delle rotazioni in tre dimensioni.

Un lavoro di questo tipo, infine, anche senza voler abbandonare l'impostazione astratta e scendere troppo nei dettagli, lascia spazio a molte precisazioni che potrebbero venire dalle osservazioni sulla realtà fisica del laboratorio. Una fondamentale direzione di approfondimento potrebbe essere, dunque, quella che porta ad affrontare questi problemi con maggiore attenzione agli aspetti sperimentali.

Bibliografia

- [1] O. Arcizet, P. F. Cohadon, T. Briant, M. Pinard, and A. Heidmann, *Radiation-pressure cooling and optomechanical instability of a micro-mirror*, Nature **444** (2006), 71–74.
- [2] Charles H. Bennett, F. Bessette, G. Brassard, Louis Salvail, and John Smolin, *Experimental quantum cryptography*, Journal of Cryptology **5** (1992), 3–28.
- [3] D. Bouwmeester, *3.9 teleportation of continuous quantum variables*, The Physics of Quantum Information (D. Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger, eds.), Springer-Verlag, Berlin, 2000, pp. 77–84.
- [4] Richard A. Campos, Bahaa E. A. Saleh, and Malvin C. Teich, *Quantum-mechanical lossless beam splitter: $Su(2)$ symmetry and photon statistics*, Phys. Rev. A **40** (1989), no. 3, 1371–1384.
- [5] G. Cattaneo, A. Leporati, and R. Leporini, *Quantum conservative many-valued computing*, Fuzzy Sets and Systems **159** (2008), 1001 – 1030.
- [6] Richard P. Feynman, *Quantum mechanical computers*, Foundations of Physics **16** (1986), 507 – 531.
- [7] I. M. Gelfand and G. E. Shilov, *Generalized functions*, Academic Press, 1968.
- [8] S. Gigan, H. R. Boehm, M. Paternostro, F. Blaser, G. Langer, J. B. Hertzberg, K. Schwab, D. Baeuerle, M. Aspelmeyer, and A. Zeilinger, *Self-cooling of a micro-mirror by radiation pressure*, Nature **444** (2006), 67–70.
- [9] Nicolas Gisin, Grégoire Ribordy, Wolfgang Tittel, and Hugo Zbinden, *Quantum cryptography*, Rev. Mod. Phys. **74** (2002), no. 1, 145–195.
- [10] Lov K. Grover, *Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997), no. 2, 325–328.

- [11] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference*, Phys. Rev. Lett. **59** (1987), no. 18, 2044–2046.
- [12] R. J. Hughes, G. L. Morgan, and C. G. Peterson, *Quantum key distribution over a 48km optical fibre network*, Journal of Modern Optics **47** (2000), 533–547(15).
- [13] Dustin Kleckner and Dirk Bouwmeester, *Sub-kelvin optical cooling of a micromechanical resonator*, Nature **444** (2006), 75–78.
- [14] P. Kok, W. J. Munro, K. Nemoto, T. C. Ralph, J. P. Dowling, and G. J. Milburn, *Linear optical quantum computing with photonic qubits*, Rev. Mod. Phys. **79** (2007), 135 – 174.
- [15] P. Kristensen, L. Mejlbo, and E.T. Poulsen, *Tempered distributions in infinitely many dimensions. i. canonical field operators*, Commun. Math. Phys **1** (1965), 175–214.
- [16] Lev D. Landau and Evgenij M. Lifšits, *The classical theory of fields*, Butterworth-Heinemann, 1980.
- [17] P. Meystre, E. M. Wright, J. D. McCullen, and E. Vignes, *Theory of radiation-pressure-driven interferometers*, J. Opt. Soc. Am. B **2** (1985), 1830 – 1840.
- [18] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge University Press, 2000.
- [19] J. L. O’Brien, G. J. Pryde, A.G. White, T. C. Ralph, and D. Branning, *Demonstration of an all-optical quantum controlled-not gate*, Nature **426** (2003), 264–267.
- [20] Z. Y. Ou and L. Mandel, *Violation of bell’s inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment*, Phys. Rev. Lett. **61** (1988), no. 1, 50–53.
- [21] Zhe Yu Ju Ou, *Multi-photon quantum interference*, Springer, 2007.
- [22] Alberto Politi, Martin J. Cyran, John G. Rarity, Siyuan Yu, and Jeremy L. O’Brien, *Silica-on-silicon waveguide quantum circuits*, Science **320** (2008), 646–649.
- [23] Jun John Sakurai, *Meccanica quantistica moderna*, Zanichelli, 1996.
- [24] Julian Schwinger, *On angular momentum*, Quantum Theory of Angular Momentum (C. Biedenharn L. and V. van Dam, eds.), Academic Press, 1965.

-
- [25] Peter W. Shor, *Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer*, SIAM J. Sci. Statist. Comput. **26** (1997), 1484.
 - [26] Stephen Wiesner, *Conjugate coding*, SIGACT News **15** (1983), no. 1, 78–88.
 - [27] Bernard Yurke, Samuel L. McCall, and John R. Klauder, *$Su(2)$ and $su(1,1)$ interferometers*, Phys. Rev. A **33** (1986), no. 6, 4033–4054.