**KONTROL OPTIMAL MODEL BIOEKONOMI SISTEM
MANGSA PEMANGSA SUMBER DAYA PERIKANAN
DENGAN PEMANENAN PADA POPULASI PEMANGSA**

*OPTIMAL CONTROL OF BIOECONOMIC MODELS PREY
PREDATOR SYSTEM FISHERIES RESOURCES WITH
HARVESTING IN PREDATOR POPULATION*

R U S T A M

**PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

MAKASSAR

2014

**KONTROL OPTIMAL MODEL BIOEKONOMI SISTEM MANGSA
PEMANGSA SUMBER DAYA PERIKANAN DENGAN
PEMANENAN PADA POPULASI PEMANGSA**

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelas Magister

Program Studi

Matematika

Disusun dan diajukan oleh

RUSTAM

kepada

**PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR**

2014

TESIS

KONTROL OPTIMAL MODEL BIOEKONOMI SISTEM MANGSA PEMANGSA SUMBER DAYA PERIKANAN DENGAN PEMANENAN PADA POPULASI PEMANGSA

yang disusun dan diajukan oleh

RUSTAM

Nomor Pokok P3500212408

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Tesis

pada tanggal 24 Juli 2014

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Menyetujui

Komisi Penasihat,

Ketua

Anggota

Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc

Prof. Moh. Ivan Azis, M.Sc., Ph.D

Ketua Program Studi
Matematika,

Direktur Program Pascasarjana
Universitas Hasanuddin.

Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc

Prof. Dr. Syamsul Bachri, S.H., M.S

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini

Nama : Rustam
Nomor Mahasiswa : P3500212408
Program Studi : Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, Juli 2014
Yang menyatakan

Rustam

PRAKATA

Alhamdulillah, segala puji hanyalah milik Allah Subhanahu wa Ta'ala atas segala nikmat-Nya yang diberikan berupa rahmat, karunia, dan hidayah-Nya. Salawat dan salam kepada Rasulullah Muhammad Shallallahu 'alaihi Wasallam, para sahabatnya, keluarganya serta kepada seluruh kaum muslimin yang senantiasa istiqomah menjalankan ajaran beliau sampai datangnya hari kiamat. Aku bersaksi tidak ada ilah yang berhak disembah selain Allah Subhanahu wa Ta'ala dan aku bersaksi Muhammad Shallallahu 'Alaihi wa Sallam adalah hamba dan Rasul-Nya.

Banyak kendala yang dihadapi oleh penulis dalam penyusunan tesis ini. Berkat limpahan rahmat dan karunia Allah Subhanahu wa Ta'ala melalui berbagai pihak, tesis ini selesai pada waktunya. Dalam kesempatan ini penulis menyampaikan jazakumullahu khairan (semoga Allah Subhanahu wa Ta'ala memberi balasan yang lebih baik) kepada

1. Ibunda dan Ayahanda tercinta, semoga Allah Subhanahu wa Ta'ala senantiasa memberi rahmat, hidayah, berkah, dan petunjuk untuk keduanya, yang selama ini telah mendidik dan membesarkan penulis dengan limpahan kasih sayang, perhatian, pengorbanan dan kesabaran yang tidak mungkin penulis dapat balas, juga motivasi dan do'a demi keberhasilan penulis selama menjalani proses pendidikan.

2. Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc selaku penasihat utama sekaligus ketua Program Studi Magister Matematika Universitas Hasanuddin dan Prof. Moh. Ivan Azis, M.Sc., Ph.D selaku penasihat anggota atas bantuan dan bimbingannya dalam penyusunan tesis ini.
3. Bapak-bapak dan ibu-ibu dosen Program Studi Magister Matematika Universitas Hasanuddin.
4. Teman-teman angkatan 2012 Program Studi Magister Matematika Universitas Hasanuddin atas bantuannya selama ini.

Akhir kata semoga tulisan ini bernilai ibadah dan bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan terutama bagi penulis. Juga karena tulisan ini masih jauh dari kata sempurna, olehnya itu penulis mengharapkan masukan dari pembaca yang sifatnya memberi masukan untuk perbaikan tesis ini. Wassalam...

Makassar, 24 Juli 2014

Penulis,

Rustam

ABSTRAK

RUSTAM. *Kontrol Optimal Model Bioekonomi Sistem Mangsa Pemangsa Sumber Daya Perikanan dengan Pemanenan pada Populasi Pemangsa* (dibimbing oleh Syamsuddin Toaha dan Moh. Ivan Azis).

Model bioekonomi sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan yang dibahas berdasarkan pada asumsi awal yaitu pemanenan hanya pada populasi pemangsa. Penelitian ini bertujuan menentukan (1) kestabilan titik keseimbangan, (2) kontrol optimal, dan (3) total laba bersih diskonto dalam kurun waktu tertentu.

Hasil penelitian yang dilakukan diperoleh tiga titik keseimbangan yang salah satunya merupakan titik keseimbangan interior. Analisis kestabilan menggunakan metode pelinearan dan uji kestabilan Hurwitz menunjukkan bahwa titik keseimbangan interior yang diperoleh merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik. Hal ini bermakna bahwa populasi mangsa dan pemangsa akan tetap lestari meskipun pemangsa dipanen.

Pada tahap kontrol optimal, variabel kontrol yang akan dicari adalah fungsi pemanenan h . Sedangkan fungsi objektifnya adalah memaksimalkan total laba bersih diskonto dari sumber daya perikanan. Solusi optimalnya diperoleh dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Dari analisis hasil simulasi dengan nilai-nilai parameter yang diberikan, disimpulkan bahwa dalam kurun waktu 10 tahun diperoleh lintasan pemanenan optimal dengan total laba bersih diskonto sekitar 110,9743901 yang diperoleh dengan menggunakan integral numerik Kaidah Simpson 1/3.

ABSTRACT

RUSTAM. *Stability Of Bioeconomics Models Prey Predator System Fisheries Resources with Harvesting in Predator Population* (supervised by Syamsuddin Toaha and Moh. Ivan Azis).

Bioeconomics model of prey predator systems in fishery resources are discussed based on the initial assumption that harvesting only the predator population. This study aims to determine the stability of the (1) equilibrium point, (2) optimal control, and (3) total discounted net revenues by a certain time.

Results of research conducted, there are three equilibrium points, one of which is the interior equilibrium point. Stability analysis using the method of linearization and Hurwitz stability test showed that the interior equilibrium point obtained an asymptotic stable equilibrium point. This means that the prey and predator populations will remain stable even though the predator is harvested.

At this stage of the optimal control, the control variable to be searched is the harvesting function h . While the objective function is to maximize the total discounted net profit of fishery resources. Optimal solution is obtained by using the Pontryagin Maximum Principle. From the analysis of simulation results with the values of the parameters given, it was concluded that in the past 10 years obtained an optimal harvesting trajectory with a total net profit of approximately 110,9743901 discount obtained by using numerical integral Simpson's Rule 1/3.

DAFTAR ISI

	halaman
PRAKATA	v
ABSTRAK	vii
<i>ABSTRACT</i>	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiii
BAB I. PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang	1
B. Rumusan Masalah	4
C. Tujuan Penelitian	5
D. Kegunaan Penelitian	5
E. Ruang Lingkup/ Batasan Penelitian	6
BAB II. TINJAUAN PUSTAKA	7
A. Titik Keseimbangan dan Kestabilan	7
B. Linearisasi Sistem di Sekitar Titik Keseimbangan	10
C. Nilai dan Vektor Eigen pada Matriks	12
D. Uji Kestabilan Hurwitz	13
E. Model Bioekonomi Sistem Mangsa Pemangsa Sumber Daya Perikanan	15

F. Formulasi Masalah Kontrol Optimal	21
G. Prinsip Maksimum Pontryagin untuk Masalah Kontrol Optimal	24
H. <i>Forward-Backward Sweep Method</i>	25
I. Integral Numerik Kaidah Simpson 1/3	27
BAB III. METODE PENELITIAN	32
BAB IV. HASIL DAN PEMBAHASAN	35
A. Titik Keseimbangan	35
B. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan	40
C. Simulasi Numerik Penentuan Titik Keseimbangan dan Kestabilannya	45
D. Kontrol Optimal Model Bioekonomi Sistem Mangsa Pemangsa Sumber Daya Perikanan	48
E. Penyelesaian Numerik	51
F. Simulasi	54
G. Total Laba Bersih Diskonto	57
BAB V. PENUTUP	60
A. Kesimpulan	60
B. Saran	61
DAFTAR PUSTAKA	62
LAMPIRAN	63

DAFTAR TABEL

nomor	halaman
1. Nilai titik-titik di dalam selang $[0,1]$ dengan <i>step size</i> 0,125	31
2. Nilai parameter (Chakraborty dkk, 2011)	46

DAFTAR GAMBAR

nomor	halaman
1. <i>Step size</i>	26
2. Kaidah Simpson 1/3	28
3. Perilaku sistem dengan pemanenan pada populasi z	54
4. Lintasan optimal laju pemanenan pada populasi pemangsa (z) selama 10 tahun	55
5. Total laba bersih diskonto	59

DAFTAR LAMPIRAN

nomor	halaman
1. Sintaksis program MATLAB 7.8.0 untuk gambar 3. dan 4.	63
2. Nilai-nilai t , h , dan z yang diperoleh dari program MATLAB 7.8.0 hasil run gambar 3. dan 4.	66

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Sumber daya alam (SDA) adalah segala sesuatu yang muncul secara alami yang dapat digunakan untuk pemenuhan kebutuhan manusia. Pada umumnya, SDA berdasarkan sifatnya dapat digolongkan menjadi SDA yang dapat diperbaharui dan SDA yang tak dapat diperbaharui. SDA yang dapat diperbaharui merupakan kekayaan alam yang dapat terus ada selama penggunaannya tidak dieksploitasi secara berlebihan. Tumbuhan dan hewan adalah contoh SDA yang dapat diperbaharui yang mana jumlahnya sangatlah berlimpah secara umum di negara Indonesia. Walaupun jumlah SDA yang dapat diperbaharui berlimpah, penggunaannya harus tetap dibatasi dan dijaga agar terus berkelanjutan dan terjaga kelestariannya sehingga manajemen sumber daya alam terbarukan merupakan suatu hal yang penting.

Perikanan merupakan salah satu bagian dari sumber daya alam terbarukan dan termasuk bidang yang banyak menggunakan konsep bioekonomi. Bioekonomi perikanan merupakan sistem yang melibatkan komponen biologi dan ekonomi. Konsep biologi digunakan dalam penurunan model dasar sedangkan konsep ekonomi dimaksudkan untuk optimalisasi pemanfaatan sumber daya perikanan.

Sumber daya perikanan merupakan salah satu kekayaan yang ada di perairan. Sumber daya perikanan mempunyai karakteristik yang unik yaitu merupakan sumber daya milik umum (*common property*). Akibatnya pemanfaatan sumber daya perikanan bersifat *open acces* artinya semua orang dapat melakukan kegiatan penangkapan ikan di suatu wilayah perairan tanpa harus memiliki terlebih dahulu dan tanpa adanya pembatasan. Dengan karakteristiknya tersebut maka dalam pemanfaatannya sumber daya perikanan dapat mengalami *overfishing* atau eksploitasi perikanan yang berlebihan yaitu tingkat upaya tangkap ikan meningkat hingga mengganggu keseimbangan populasi ikan yang berakibat tidak lagi diperoleh keuntungan dari pemanfaatan sumber daya perikanan tersebut bahkan bisa berujung pada kepunahan populasi ikan pada wilayah tertentu dimana terjadi *overfishing* tersebut. Jika hal ini terus berlanjut, maka akan berdampak negatif pada keadaan perekonomian negara yang terjadi *overfishing*.

Konsep bioekonomi perikanan dikembangkan dengan tujuan mencegah terjadinya eksploitasi berlebihan pada sumber daya perikanan. Oleh karena itu dibutuhkan suatu manajemen perikanan yang bertujuan menjamin keberlangsungan sumber daya perikanan di masa mendatang dan tetap memberikan keuntungan ekonomis dengan cara menerapkan manajemen yang tepat.

Pada konsep biologi, interaksi biologi yang biasa dijumpai dalam ekosistem adalah interaksi mangsa pemangsa. Salah satu contoh

interaksi mangsa pemangsa dalam perikanan adalah interaksi antara bibit ikan bandeng (nener) dan ikan kakap putih (*lates calcarifer*). Bentuk interaksinya yaitu ikan kakap putih merupakan pemangsa bagi bibit ikan bandeng (nener), dimana ikan kakap putih merupakan pemangsa yang rakus dan aktif memburu mangsanya. Di beberapa daerah ikan kakap putih dikenal dengan berbagai nama seperti ikan sikap bagi masyarakat Aceh, cukil atau celah bagi masyarakat Surabaya, dan kasakasa bagi masyarakat Bugis (Fahmi, 2000).

Beberapa penelitian terdahulu yang mendasari penelitian ini, antara lain penelitian Chakraborty dkk., (2011) yang berjudul “*bifurcation and control of a bioeconomic model of a prey–predator sistem with a time delay*” meneliti tentang model bioekonomi sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan dengan waktu tunda, dimana terdapat dua zona populasi mangsa. Selain itu, Chakraborty dkk., pada tahun yang sama (2011) juga meneliti “*Optimal control of harvest and bifurcation of a prey–predator model with stage structure*” tentang kontrol optimal pemanenan model mangsa pemangsa sumber daya perikanan dengan tahapan struktur dimana permasalahan yang dikaji terdiri dari dua bagian. Bagian pertama dilakukan penambahan faktor pemanenan pada populasi mangsa dan pada bagian kedua penambahan faktor pemanenan dilakukan pada populasi pemangsa. Sedangkan Prastiwi (2013) mengkombinasikan kedua jenis penelitian Chakraborty dkk., (2011) tersebut yaitu melihat pengaruh waktu tunda pada pertumbuhan pemangsa, dengan mengambil

model yang ada pada penelitian Chakraborty dkk., (2011) yang pertama yaitu pembagian zona mangsa menjadi dua zona (zona bebas penangkapan ikan dan zona reservasi) dan penambahan faktor pemanenan dilakukan pada populasi mangsa zona bebas penangkapan ikan. Sedangkan pada tahap kontrol optimal, fungsi keuntungannya diambil dari penelitian Chakraborty dkk., (2011) yang kedua dengan metode penyelesaian menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

Sehingga berdasarkan latar belakang dan penelitian-penelitian tersebut, akan diusulkan suatu penelitian tentang kontrol optimal model bioekonomi sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan dengan penambahan faktor pemanenan dilakukan pada populasi pemangsa.

B. Rumusan Masalah

Perumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimanakah kestabilan titik keseimbangan sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan dengan pemanenan dilakukan pada populasi pemangsa?
2. Bagaimanakah bentuk kontrol optimal model bioekonomi sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan dengan pemanenan dilakukan pada populasi pemangsa?
3. Berapa total laba bersih diskonto dalam kurun waktu tertentu model bioekonomi sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan dengan pemanenan dilakukan pada populasi pemangsa?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan kestabilan titik keseimbangan sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan dengan pemanenan dilakukan pada populasi pemangsa.
2. Menentukan bentuk kontrol optimal model bioekonomi sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan dengan pemanenan dilakukan pada populasi pemangsa.
3. Menentukan total laba bersih diskonto dalam kurun waktu tertentu model bioekonomi sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan dengan pemanenan dikenakan pada populasi pemangsa setelah dilakukan kontrol.

D. Kegunaan Penelitian

Kegunaan penelitian ini adalah memberikan sumbangsih pengetahuan mengenai pemodelan matematika dalam bidang ekologi dan bioekonomi. Hasil penelitian ini juga diharapkan bermanfaat membantu pihak-pihak yang berkepentingan seperti dalam bidang perikanan dan kelautan serta dalam bidang biologi dan ekonomi.

E. Ruang Lingkup/ Batasan Penelitian

Ruang lingkup atau batasan penelitian dalam penelitian ini yaitu dibatasi pada penambahan faktor pemanenan dilakukan hanya pada populasi pemangsa.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Titik Keseimbangan dan Kestabilan

Diberikan sistem autonomus sebagai berikut

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)). \quad (2.1)$$

Suatu sistem dinamik disebut linear jika fungsi f linear terhadap x .

Sistem tersebut dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx(t)}{dt} = J(t)x(t) \quad (2.2)$$

dimana $J(t)$ adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ yang bergantung pada waktu t .

Jika untuk setiap t pada persamaan (2.1) berlaku

$$f(x_e, t) = 0, \quad (2.3)$$

maka

$$x(t; x_e, t_0) = x_e, \quad (2.4)$$

untuk sebarang t_0 .

Titik x_e yang memenuhi persamaan (2.3) disebut suatu titik keseimbangan atau titik kritis atau keadaan seimbang. Dengan demikian, suatu solusi yang melalui titik keseimbangan x_e pada suatu saat akan

tetap berada pada titik tersebut untuk setiap waktu t . Solusi yang demikian disebut solusi setimbang atau trajektori konstan dan jika $x_e = 0$, maka solusi tersebut disebut solusi nol.

Misalnya x_e adalah suatu titik keseimbangan dari sistem dinamik

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t), \quad (2.5)$$

dengan $f(x_e, t) = 0$ untuk setia t .

Definisi 1. Titik keseimbangan x_e atau solusi keseimbangan $x(t) = x_e$ dikatakan stabil jika diberikan sebarang t_0 dan bilangan positif ε , terdapat suatu bilangan positif $\delta(\varepsilon, t_0)$ sedemikian sehingga, jika

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \quad (2.6)$$

berlaku

$$\|x(t; x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon \quad (2.7)$$

untuk setiap $t > t_0$.

Definisi 2. Titik keseimbangan x_e disebut konvergen yaitu stabil secara quasi-asimptotik, jika untuk sebarang t_0 terdapat $\delta_1(t_0)$ sedemikian sehingga, jika

$$\|x_0 - x_e\| < \delta_1 \quad (2.8)$$

berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0, t_0) = x_e, \quad (2.9)$$

untuk setiap t_0 . Dengan perkataan lain, untuk setiap ε_1 , terdapat $T(\varepsilon_1, x_0, t_0)$ sedemikian sehingga, jika

$$\|x_0 - x_e\| < \delta_1 \quad (2.10)$$

berlaku

$$\|x(t; x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon_1, \quad (2.11)$$

untuk setiap $t \geq t_0 + T$.

Definisi 3. Titik keseimbangan x_e disebut stabil asimptotik, jika ia konvergen dan stabil.

Definisi 4. Titik keseimbangan x_e disebut stabil asimptotik global, jika ia stabil dan setiap trajektori konvergen ke titik keseimbangan tersebut untuk t menuju ke tak berhingga (Toaha, 2013).

Definisi 5. (Haberman, 1977). Kestabilan titik keseimbangan dapat diketahui dengan memperhatikan tanda dari nilai bilangan real akar-akar persamaan karakteristik. Suatu titik keseimbangan dikatakan

- 1) stabil jika bagian real semua akarnya negatif,
- 2) tidak stabil jika bagian real dari paling sedikit satu akarnya positif,
- 3) stabil netral jika bagian real akar sama dengan nol dan lainnya negatif; jika semua akarnya diindikasikan nol maka disebut tidak stabil secara aljabar.

Dalam menentukan kestabilan titik keseimbangan dua populasi, penentuan akar-akar persamaan karakteristik (nilai eigen) dapat dilakukan

dengan mudah. Namun, untuk menentukan titik keseimbangan lebih dari dua populasi, dapat digunakan uji kestabilan Hurwitz.

B. Linearisasi Sistem di Sekitar Titik Keseimbangan

Pertimbangkan sistem persamaan diferensial autonomus non linear dimensi dua berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.12}$$

yang mempunyai titik keseimbangan (x_e, y_e) , yaitu memenuhi $f(x_e, y_e) = 0$ dan $g(x_e, y_e) = 0$. Untuk menganalisis kestabilan titik keseimbangan (x_e, y_e) , kita lanjutkan dengan memeriksa apa yang terjadi pada kurva solusi $(x(t), y(t))$ jika kurva solusi tersebut pada awalnya sangat dekat dengan titik keseimbangan (x_e, y_e) . Proses ini biasa disebut analisis kestabilan linear atau linearisasi sistem di sekitar titik keseimbangan. Misalkan

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \varepsilon X(t) \\ y(t) &= y_e + \varepsilon Y(t)\end{aligned}\tag{2.13}$$

dimana ε adalah suatu bilangan positif kecil. Nilai $\varepsilon X(t)$ dan $\varepsilon Y(t)$ dapat dinyatakan sebagai nilai pergeseran $x(t)$ dan $y(t)$ dari titik keseimbangan (x_e, y_e) . Dengan mensubstitusi persamaan (2.13) ke dalam persamaan (2.12) diperoleh

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dX}{dt} &= f(x_e + \varepsilon X(t), y_e + \varepsilon Y(t)) \\ \varepsilon \frac{dY}{dt} &= g(x_e + \varepsilon X(t), y_e + \varepsilon Y(t)).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Kemudian dengan mengenakan ekspansi deret Taylor pada fungsi dua variabel persamaan (2.14) di sekitar titik keseimbangan (x_e, y_e) diperoleh

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dX}{dt} &= f(x_e, y_e) + \varepsilon X \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, y_e) + \varepsilon Y \frac{\partial f}{\partial y}(x_e, y_e) + O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon \frac{dY}{dt} &= g(x_e, y_e) + \varepsilon X \frac{\partial g}{\partial x}(x_e, y_e) + \varepsilon Y \frac{\partial g}{\partial y}(x_e, y_e) + O(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{2.15}$$

Dengan asumsi bahwa nilai ε cukup kecil maka bentuk $O(\varepsilon^2)$ nilainya menjadi lebih kecil lagi. Dengan pertimbangan tersebut, bentuk $O(\varepsilon^2)$ dapat diabaikan. Selanjutnya, karena titik keseimbangan (x_e, y_e) memenuhi $f(x_e, y_e) = 0$ dan $g(x_e, y_e) = 0$, maka bentuk terakhir dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= X \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, y_e) + Y \frac{\partial f}{\partial y}(x_e, y_e) \\ \frac{dY}{dt} &= X \frac{\partial g}{\partial x}(x_e, y_e) + Y \frac{\partial g}{\partial y}(x_e, y_e).\end{aligned}\tag{2.16}$$

Sistem persamaan diferensial linear pada persamaan (2.16) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_e, y_e)} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\tag{2.17}$$

yang mempunyai titik keseimbangan $(0,0)$. Matriks

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

disebut matriks Jacobi (Toaha, 2013).

C. Nilai dan Vektor Eigen pada Matriks

Definisi 6. (Anton dan Rorres, 2005). Jika $A_{n \times n}$ adalah matriks maka sebuah vektor tak nol pada R^n disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x yaitu

$$Ax = \lambda x, \quad (2.19)$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Untuk mencari nilai eigen dari sebuah matriks berukuran $n \times n$, persamaan (2.19) dituliskan dalam bentuk

$$Ax = \lambda Ix \text{ atau } (A - \lambda I)x = 0. \quad (2.20)$$

Persamaan (2.20) akan memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (2.21)$$

Persamaan tersebut dinamakan persamaan karakteristik dari matriks A .

Skalar yang memenuhi persamaan ini disebut nilai eigen.

D. Uji Kestabilan Hurwitz

Pada bagian ini, suatu metode dipertimbangkan untuk menguji kestabilan titik keseimbangan dari sistem dinamik linear dengan koefisien konstan,

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (2.22)$$

dengan x adalah matriks berukuran $n \times 1$ dan A adalah matriks berukuran $n \times n$.

Dari teorema dasar aljabar menyatakan bahwa suatu polinomial

$$f(r) = r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \dots + p_2r^2 + p_1r + p_0, \quad (2.23)$$

dengan $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ adalah konstanta real, mempunyai n akar, $r_1, r_2, \dots, r_n$. Masing-masing akar bernilai real atau mungkin bernilai kompleks yang memenuhi $f(r_i) = 0$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Dengan perkataan lain berlaku

$$f(r) = (r - r_1)(r - r_2) \dots (r - r_n). \quad (2.24)$$

Nilai eigen dari matriks A merupakan akar-akar dari polinomial $f(r)$.

Uji kestabilan Hurwitz untuk titik keseimbangan $O = (0, 0, \dots, 0)$ pada sistem (2.22) tidak melibatkan perhitungan nilai eigen dari matriks A . Uji kestabilan Hurwitz menguji determinan dari matriks H_n yang disebut matriks Hurwitz. Entry-entry matriks Hurwitz nilainya hanya memuat $0, 1, p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$. Matriks Hurwitz diberikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
H_1 &= (p_{n-1}), \\
H_2 &= \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} \\ 1 & p_{n-2} \end{pmatrix}, \\
H_3 &= \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} \\ 1 & p_{n-2} & p_{n-4} \\ 0 & p_{n-1} & p_{n-3} \end{pmatrix}, \\
H_4 &= \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} & p_{n-7} \\ 1 & p_{n-2} & p_{n-4} & p_{n-6} \\ 0 & p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} \\ 0 & 1 & p_{n-2} & p_{n-4} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.25}$$

sampai matriks H_n . Disini, nilai p_j didefinisikan bernilai 0 jika j bernilai negatif.

Teorema 1. Uji kestabilan Hurwitz (Willems, 1970; Jeffries, 1989). Misalkan sistem dinamik (2.22) mempunyai trajektori konstan $\mathbf{0}$. Setiap matriks Hurwitz mempunyai determinan dengan nilai positif jika dan hanya jika setiap bagian real dari nilai eigen matriks A bernilai negatif dan $\mathbf{0}$ merupakan suatu trajektori atraktor, yaitu titik keseimbangan $\mathbf{0}$ stabil asimptotik.

Untuk nilai n yang kecil, uji stabilan Hurwitz menyatakan bahwa masing-masing matriks Hurwitz mempunyai determinan dengan nilai positif jika dan hanya jika, untuk

$$\begin{aligned}
n=1, \quad p_0 &> 0; \\
n=2, \quad p_0, p_1 &> 0; \\
n=3, \quad p_0, p_1, p_2 &> 0, \quad p_2 p_1 - p_0 > 0; \\
n=4, \quad p_0, p_1, p_2, p_3 &> 0, \quad p_3 p_2 p_1 - p_1^2 - p_0 p_3^2 > 0.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Dengan demikian kestabilan titik keseimbangan **0** dapat diketahui dengan memperhatikan nilai-nilai koefisien dari persamaan karakteristik matriks A (Toaha, 2013).

E. Model Bioekonomi Sistem Mangsa Pemangsa

Sumber Daya Perikanan

Model bioekonomi sistem mangsa pemangsa pada tesis ini diasumsikan bahwa mangsa berada pada dua zona. Zona pertama merupakan zona bebas penangkapan ikan dan zona kedua merupakan zona reservasi dimana kegiatan penangkapan ikan dilarang. Masing-masing populasi mangsa bermigrasi antara dua zona tersebut secara acak. Sehingga secara umum laju perubahan populasi mangsa dirumuskan sebagai berikut

$$\frac{dN}{dt} = f(k, m) \quad (2.27)$$

dimana

N : Banyaknya individu di dalam populasi pada waktu t ,

k : Perubahan populasi bergantung pada laju kelahiran dan kematian,

m : Perubahan populasi bergantung pada laju migrasi.

Misalkan b_1 adalah laju kelahiran mangsa pada populasi zona I dan b_2 adalah laju kelahiran mangsa pada populasi zona II. Sedangkan d_1

adalah laju kematian mangsa pada populasi zona I dan d_2 adalah laju kematian mangsa pada populasi zona II, serta $x(t)$ dan $y(t)$ merupakan banyaknya individu di dalam populasi mangsa pada zona I dan II pada waktu t . Sehingga laju perubahan populasi masing-masing zona dirumuskan menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= b_1x - d_1x - \sigma_1x + \sigma_2y \\ \frac{dy}{dt} &= b_2y - d_2y + \sigma_1x - \sigma_2y\end{aligned}\tag{2.28}$$

dimana

σ_1 : laju migrasi dari zona bebas penangkapan ikan ke zona reservasi,

σ_2 : laju migrasi dari zona reservasi ke zona bebas penangkapan ikan.

Persamaan (2.28) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (b_1 - d_1)x - \sigma_1x + \sigma_2y \\ \frac{dy}{dt} &= (b_2 - d_2)y + \sigma_1x - \sigma_2y.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Jika $r = b_1 - d_1$ merupakan laju pertumbuhan intrinsik pada zona bebas penangkapan ikan dan $s = b_2 - d_2$ merupakan laju pertumbuhan intrinsik pada zona reservasi, maka persamaan sistem dinamik (2.29) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx - \sigma_1 x + \sigma_2 y \\ \frac{dy}{dt} &= sy + \sigma_1 x - \sigma_2 y.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Pertumbuhan mangsa di masing-masing zona tanpa adanya pemangsa diasumsikan logistik, sehingga sistem dinamik (2.30) dimodifikasi menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y\end{aligned}\tag{2.31}$$

dimana

K : *carrying capacity* (daya tampung lingkungan) populasi mangsa di zona bebas penangkapan ikan,

L : *carrying capacity* (daya tampung lingkungan) populasi mangsa di zona reservasi.

Diasumsikan terdapat populasi pemangsa yang memangsa di zona bebas penangkapan ikan. Misal $z(t)$ adalah banyaknya populasi pemangsa, sehingga sistem dinamik (2.31) berubah menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \alpha xz \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Sedangkan laju perubahan populasi pemangsa dirumuskan sebagai berikut

$$\frac{dz}{dt} = -kz + \beta\alpha xz \quad (2.33)$$

dimana

α : peningkatan maksimal dari pemangsa,

β : laju pemangsa mengonsumsi mangsa ($0 < \beta < 1$), dan

k : laju kematian pemangsa.

Bentuk αx pada persamaan (2.32) dan (2.33) merupakan respon fungsional pemangsa terhadap populasi mangsa. Diasumsikan respon fungsional pemangsa adalah respon fungsional Holling tipe II, sehingga sistem dinamik (2.32) dan (2.33) menjadi (Chakraborty dkk., 2011)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\alpha xz}{a+x} \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L} \right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\beta\alpha xz}{a+x} - kz \end{aligned} \quad (2.34)$$

dimana

a : konstanta Michaelis Menten.

Diasumsikan pula bahwa pemanenan hanya dilakukan terhadap populasi pemangsa sedangkan pemanenan tidak dilakukan pada populasi

mangsa. Sehingga pemanenan tidak akan mempengaruhi pertumbuhan populasi mangsa. Diasumsikan pula bahwa pemangsa berkompetisi terhadap sesamanya untuk bertahan hidup, sehingga sistem dinamik (2.34) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\alpha x z}{a + x} \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\beta \alpha x z}{a + x} - kz - \gamma z^2 - h(t)\end{aligned}\tag{2.35}$$

dimana

$h(t)$: pemanenan terhadap populasi pemangsa pada saat t ,

γ : koefisien intra spesifik populasi pemangsa.

Bentuk fungsional dari pemanenan secara umum diturunkan dengan menggunakan rumusan produksi per unit usaha yang menggambarkan asumsi bahwa produksi per unit usaha proporsional dengan stok level. Oleh karena itu fungsi panen dapat ditulis

$$h = qEz\tag{2.36}$$

dimana

q : koefisien daya tangkap,

E : usaha yang digunakan untuk memanen populasi.

Selanjutnya peninjauan sisi ekonomisnya, Liu dkk., (2011) meneliti efek panen pada ekosistem dan merumuskan keuntungan ekonomis dari hasil pemanenan sebagai berikut.

$$\text{Net Economic Revenue (NER)} = \text{Total Revenue (TR)} - \text{Total Cost (TC)} \quad (2.37)$$

Pendapatan total (*total revenue*) diperoleh dari harga per unit ikan dikalikan dengan jumlah ikan yang dipanen, secara matematis dinyatakan dengan

$$TR = pqEz \quad (2.38)$$

dimana

p : harga per unit ikan tangkapan.

Sedangkan biaya produksi (*total cost*) sebanding dengan usaha yang diberikan, sehingga dinyatakan dengan

$$TC = cE \quad (2.39)$$

dimana

c : biaya penangkapan per unit usaha.

Keuntungan ekonomi diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (2.38) dan (2.39) ke dalam persamaan (2.37), yaitu

$$\begin{aligned} m &= pqEz - cE \\ &= (pqz - c)E \end{aligned} \quad (2.40)$$

dimana

m : keuntungan total ekonomi sumber daya perikanan.

Jika persamaan (2.36) disubstitusi ke dalam sistem dinamik (2.35) dan menambahkan persamaan (2.40) ke dalam sistem dinamik (2.35), maka diperoleh model bioekonomi sumber daya perikanan dengan pemanenan dilakukan pada populasi pemangsa adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\alpha xz}{a+x} \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\beta \alpha xz}{a+x} - kz - \gamma z^2 - qEz \\ (pqz - c)E - m &= 0\end{aligned}\tag{2.41}$$

dengan kondisi awal $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, dan $z(0) > 0$.

F. Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Tujuan utama kontrol optimal adalah menentukan nilai variabel kontrol yang memenuhi beberapa kendala keadaan dan pada saat yang bersamaan memaksimalkan atau meminimalkan kriteria performansi yang dipilih (disebut juga fungsi objektif atau fungsi keuntungan).

Formulasi masalah kontrol optimal membutuhkan

1. Gambaran matematis (model) dari sistem yang akan dikontrol, pada umumnya dalam bentuk variabel keadaan (*state*) yaitu

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t).\tag{2.42}$$

2. Spesifikasi dari fungsi keuntungan. Bentuk umum dari fungsi keuntungan adalah

$$J(u, x) = g(x(b)) + \int_a^b L(t, x(t), u(t)) dt. \quad (2.43)$$

Fungsi keuntungan tersebut merupakan bentuk Bolza. Jika $g = 0$ dinamakan bentuk Lagrange, sedangkan jika $L = 0$ dinamakan bentuk Mayer.

3. Kondisi batas atau kendala fisik pada keadaan atau pengontrolannya.

Pada eksploitasi komersial dari sumber daya perikanan, masalah utama pada sudut pandang ekonomi adalah menentukan panen yang optimal antara saat ini dan masa mendatang sekaligus memperoleh keuntungan optimal. Untuk memaksimalkan total laba bersih dari sumber daya perikanan, maka masalah kontrol optimal dapat diformulasikan dengan fungsi keuntungan sebagai berikut. Dari persamaan (2.40) keuntungan ekonomi atau *NER* dirumuskan dengan

$$m = pqEz - cE. \quad (2.44)$$

Diasumsikan harga per unit tangkapan p merupakan fungsi yang menurun jika jumlah tangkapan meningkat. Misal v adalah konstanta ekonomi, maka diperoleh

$$m = (p - vh)qEz - cE. \quad (2.45)$$

Karena harga berkaitan dengan nilai uang, maka m diformulasikan dalam bentuk *present value* (nilai sekarang) dan dari persamaan (2.36) diperoleh

$E = \frac{h}{qz}$, sehingga persamaan (2.45) menjadi

$$m = e^{-\delta t} \left[(p - vh)h - \frac{ch}{qz} \right] \quad (2.46)$$

dimana

δ : tingkat diskonto tahunan.

Jadi, untuk memaksimalkan total laba bersih diskonto maka fungsi keuntungannya adalah (Chakraborty dkk., 2011)

$$J(h) = \int_{t_0}^{t_f} e^{-\delta t} \left[(p - vh)h - \frac{ch}{qz} \right] dt. \quad (2.47)$$

Sehingga formulasi masalah kontrol optimal pada tesis ini mempunyai kendala keadaan

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\alpha xz}{a+x} \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L} \right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\beta \alpha xz}{a+x} - kz - \gamma z^2 - h \end{aligned} \quad (2.48)$$

dan fungsi keuntungan seperti pada persamaan (2.47).

Kendala variabel kontrol $0 \leq h \leq h_{\max}$ dapat diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Prinsip Maksimum Pontryagin digunakan untuk mendapatkan kontrol optimal dari suatu sistem dinamik dengan memaksimalkan fungsi keuntungan.

G. Prinsip Maksimum Pontryagin untuk Masalah

Kontrol Optimal

Berikut diberikan ringkasan prosedur penyelesaian masalah kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

Diberikan persamaan keadaan $\dot{x}(x) = f(x, u, t)$ dan fungsi keuntungan

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x, u, t) dt. \quad (2.49)$$

Diberikan pula konstrain variabel kontrol $u \in U$ untuk semua $t \in [t_0, t_f]$.

Kemudian dibentuk fungsi Hamiltonian $H(x, u, \lambda, t) = g(x, u, t) + \lambda f(x, u, t)$

dimana λ adalah fungsi yang tidak diketahui disebut variabel adjoint.

Kemudian memaksimumkan $H(x, u, \lambda, t)$ terhadap semua vektor kontrol

untuk memperoleh $u^* = u^*(x, \lambda, t)$ dengan cara menyelesaikan persamaan

kontrol $\frac{\partial}{\partial u} H(x, u, \lambda, t) = 0$. Langkah selanjutnya yaitu membentuk fungsi

Hamiltonian $H^*(x, \lambda, t) = \max_{u \in U} H(x, u, \lambda, t)$ dan menyelesaikan persamaan

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H^*(x, \lambda, t)}{\partial \lambda} \quad (2.50)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H^*(x, \lambda, t)}{\partial x} \quad (2.51)$$

dengan kondisi batas diberikan. Persamaan (2.50) disebut persamaan keadaan dan persamaan (2.51) disebut persamaan kokeadaan. Untuk memperoleh kontrol optimal, hasil dari persamaan (2.50) dan (2.51) disubstitusi ke dalam ekspresi u^* (Subiono, 2013).

H. *Forward-Backward Sweep Method*

Permasalahan kontrol optimal secara umum diformulasikan sebagai berikut.

Memaksimumkan

$$J(u) = \int_a^b L(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.52)$$

dengan kendala keadaan

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.53)$$

dan kondisi awal $x(t) = a$.

Permasalahan kontrol optimal pada persamaan (2.52) dan (2.53) akan diselesaikan secara numerik, sehingga dirancang sebuah algoritma yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dengan pendekatan kontrol x^* kontinu sepotong-sepotong optimal. Interval waktu $[a, b]$ dibagi menjadi beberapa bagian dengan *step size*

$h = \frac{b-a}{N}$ untuk $N \in \mathbb{N}_+$, sehingga dapat digunakan $t_i = a + ih$, $x(t_i) \approx x_i$ dan $u(t_i) \approx u_i$ dengan $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Gambar berikut menunjukkan transformasi $[a, b]$ menjadi bentuk diskrit.

Gambar 1. Step size

Algoritma penyelesaiannya *Forward Backward Sweep Method*

diberikan di bawah ini.

1. Membuat nilai awal perkiraan untuk u pada interval tersebut.
2. Menggunakan kondisi awal $x_1 = x(t_0) = a$ dan nilai u , selesaikan x dalam persamaan diferensial dengan *Forward Sweep*.
3. Menggunakan kondisi transversal $\lambda_{N+1} = \lambda(t_1) = 0$, nilai u , dan nilai x yang sudah didapatkan pada langkah ke-2, selesaikan λ dengan *Backward Sweep*.

4. Memperbaharui nilai u dengan memasukkan nilai x dan λ yang telah didapatkan pada langkah ke-3.
5. Cek konvergensi. Jika selisih nilai variabel-variabel antara iterasi sekarang dengan iterasi sebelumnya cukup dekat maka nilai variabel pada iterasi tersebut adalah solusinya. Jika tidak cukup dekat maka kembali ke langkah ke-2.

Penyelesaian akan dilakukan dengan simulasi numerik dimana *Forward Backward Sweep Method* dijalankan dengan bantuan *software* MATLAB 7.8.0 (Prastiwi, 2013).

I. Integral Numerik Kaidah Simpson 1/3

Integral mempunyai banyak terapan dalam bidang sains dan rekayasa. Dalam prakteknya, sering kali fungsi yang diintegrasikan (*integrand*) adalah fungsi empirik yang diberikan dalam bentuk tabel, atau *integran*-nya tidak dalam bentuk fungsi elementer ($\sinh x$, fungsi Gamma $\Gamma(\alpha)$, dsb), atau fungsi eksplisit f yang terlalu rumit untuk diintegrasikan. Oleh sebab itu metode numerik dapat digunakan untuk menghapiri integrasi.

Pada tesis ini, keuntungan total dari hasil kontrol yang telah dilakukan akan dihitung dengan menggunakan integral numerik yaitu integral numerik Kaidah Simpson 1/3. Misalkan fungsi $f(x)$ dihapiri

dengan polinom interpolasi derajat 2 yang grafiknya berbentuk parabola. Luas daerah yang dihitung sebagai hampiran dari nilai integrasi adalah daerah dibawah parabola (Gambar 2). Untuk itu, dibutuhkan 3 buah titik data, misalkan $(0, f(0))$, $(h, f(h))$, dan $(2h, f(2h))$.

Gambar 2. Kaidah Simpson 1/3

Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 2 yang melalui ketiga buah titik tersebut adalah

$$\begin{aligned}
 p_2(x) &= f(x_0) + \frac{x}{h} \Delta f(x_0) + \frac{x(x-h)}{2!h^2} \Delta^2 f(x_0) \\
 &= f_0 + x \Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2} \Delta^2 f_0
 \end{aligned}$$

Integral $p_2(x)$ dalam selang $[0, 2h]$ adalah

$$\begin{aligned}
 I &\approx \int_0^{2h} f(x)dx \approx \int_0^{2h} p_2(x)dx \\
 &\approx \int_0^{2h} \left(f_0 + x \Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2} \Delta^2 f_0 \right) dx \\
 &\approx f_0 x + \frac{1}{2h} x^2 \Delta f_0 + \left(\frac{x^3}{6h^2} - \frac{x^2}{4h} \right) \Delta^2 f_0 \Big|_{x=0}^{x=2h} \\
 &\approx 2h f_0 + \frac{4h^2}{2h} \Delta f_0 + \left(\frac{8h^3}{6h^2} - \frac{4h^2}{4h} \right) \Delta^2 f_0 \\
 &\approx 2h f_0 + 2h \Delta f_0 + \left(\frac{4h}{3} - h \right) \Delta^2 f_0 \\
 &\approx 2h f_0 + 2h \Delta f_0 + \frac{h}{3} \Delta^2 f_0.
 \end{aligned}$$

Mengingat $\Delta f_0 = f_1 - f_0$

dan

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
 I &\approx 2h f_0 + 2h(f_1 - f_0) + \frac{h}{3}(f_2 - 2f_1 + f_0) \\
 &\approx 2h f_0 + 2h f_1 - 2h f_0 + \frac{h}{3} f_2 - \frac{2h}{3} f_1 + \frac{h}{3} f_0 \\
 &\approx \frac{h}{3} f_0 + \frac{4h}{3} f_1 + \frac{h}{3} f_2 \\
 &\approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2).
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Persamaan (2.54) dinamakan Kaidah Simpson 1/3. Sebutan 1/3 muncul karena di dalam persamaan (2.54) terdapat faktor 1/3.

Misalkan kurva fungsi sepanjang selang integrasi $[a, b]$ kita bagi menjadi $n+1$ buah titik diskrit $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, dengan n genap, dan setiap 3 buah titik (atau setiap 2 pasang subinterval) di kurva, dihipotesiskan dengan parabola (polinom interpolasi derajat 2), maka kita akan mempunyai $n/2$ buah potongan parabola. Bila masing-masing polinom derajat 2 tersebut kita integralkan di dalam subinterval integrasinya, maka jumlah seluruh integral tersebut membentuk Kaidah Simpson 1/3 gabungan

$$\begin{aligned}
 I_{tot} &= \int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \\
 &\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \dots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \\
 &\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \\
 &\approx \frac{h}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f_i + f_n \right)
 \end{aligned}$$

Contoh

Hitung integral $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ dengan menggunakan jarak antara titik 0,125!

Penyelesaian

Jumlah subintervalnya yaitu $n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0.125} = 8$.

Tabel titik-titik di dalam selang $[0,1]$ adalah

Tabel 1. Nilai titik-titik di dalam selang $[0,1]$ dengan *step size* 0,125

r	x_r	f_r
0	0	1
1	0.125	0.88889
2	0.250	0.80000
3	0.375	0.72727
4	0.500	0.67777
5	0.625	0.61538
6	0.750	0.57143
7	0.875	0.53333
8	1.000	0.50000

Sehingga dengan Kaidah Simpson 1/3 diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx &\approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + f_8) \\
 &\approx \frac{0.125}{3} (16.63568) \\
 &\approx 0.69315
 \end{aligned}$$

(Munir, 2013).

BAB III

METODE PENELITIAN

Dalam bab ini dijelaskan mengenai lokasi, waktu, dan tahapan-tahapan penelitian yang dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian. Lokasi penelitian bertempat di kota Makassar Provinsi Sulawesi Selatan, khususnya di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin. Penelitian dilaksanakan berlangsung dari bulan Maret s.d Juni 2014 dengan tahapan-tahapan sebagai berikut.

1. Identifikasi Masalah

Identifikasi masalah dilakukan untuk menetapkan fokus permasalahan penelitian.

2. Studi Pustaka

Studi pustaka dilakukan dengan mencari referensi yang mendukung pelaksanaan penelitian.

3. Formulasi Model

Pada tahap ini diformulasikan bentuk kontrol optimal model bioekonomi sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan dengan pemanenan pada populasi pemangsa.

4. Penentuan Titik Keseimbangan

Penentuan titik keseimbangan dilakukan dari formulasi model yang telah terbentuk.

5. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Pada tahap ini, titik keseimbangan yang diperoleh ditentukan yang merupakan titik keseimbangan interior (semua positif), kemudian dilakukan uji kestabilan dengan menggunakan metode linearisasi dan uji kestabilan Hurwitz.

6. Simulasi Numerik Penentuan Titik Keseimbangan dan Kestabilannya

Dengan menggunakan nilai parameter yang sesuai, pada simulasi numerik ini ditunjukkan bahwa terdapat titik keseimbangan yang stabil asimptotik.

7. Penentuan Laju Pemanenan Optimal dan Total Laba Bersih Diskonto

Pada tahap ini digunakan Prinsip Maksimum Pontryagin untuk menentukan laju pemanenan optimal (h) secara numerik menggunakan *Forward Backward Sweep Method* dan dijalankan dengan bantuan *software* MATLAB 7.8.0 dan penghitungan total laba bersih diskonto menggunakan integral numerik Kaidah Simpson 1/3.

8. Penarikan Kesimpulan

Hasil yang telah diperoleh pada tahap 7, kemudian ditarik kesimpulan yang merupakan jawaban dari rumusan masalah.

9. Penyusunan Laporan dan Publikasi Ilmiah

Pada tahap ini, disusun laporan tertulis dari semua tahapan penelitian yang telah dilakukan dan hasil yang diperoleh yang telah diseminarkan, kemudian dilakukan publikasi ilmiah.

Tahap penelitian digambarkan dalam diagram alir (*flow chart*) berikut ini.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan adalah titik yang diperoleh ketika sistem (2.48) berada pada keadaan setimbang. Keadaan setimbang adalah keadaan dimana perubahan banyaknya individu pada populasi x, y , dan z sepanjang waktu adalah nol atau dengan kata lain $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$. Titik keseimbangan model bioekonomi sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan pada tesis ini diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan berikut.

$$rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\alpha xz}{a+x} = 0 \quad (4.1)$$

$$sy\left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\beta \alpha xz}{a+x} - kz - \gamma z^2 - qEz = 0 \quad (4.3)$$

$$(pqz - c)E - m = 0 \quad (4.4)$$

Titik keseimbangan sistem (4.1), (4.2), (4.3), dan (4.4) diperoleh dengan tahapan-tahapan sebagai berikut.

1. Titik keseimbangan pertama

Dari persamaan (4.3)

$$\frac{\beta\alpha xz}{a+x} - kz - \gamma z^2 - qEz = 0$$

$$z \left(\frac{\beta\alpha x}{a+x} - k - \gamma z - qE \right) = 0,$$

diperoleh

$$z = 0 \tag{4.5}$$

atau

$$\frac{\beta\alpha x}{a+x} - k - \gamma z - qE = 0. \tag{4.6}$$

Dari persamaan (4.4) diperoleh

$$(pqz - c)E - m = 0$$

$$E = \frac{m}{pqz - c}, \tag{4.7}$$

dengan mensubstitusi persamaan (4.5) diperoleh

$$E = -\frac{m}{c}. \tag{4.8}$$

Kemudian persamaan (4.2) disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
sy\left(1-\frac{y}{L}\right)-\sigma_2y &= -\sigma_1x \\
y\left(s\left(1-\frac{y}{L}\right)-\sigma_2\right) &= -\sigma_1x \\
y &= -\frac{\sigma_1x}{s\left(1-\frac{y}{L}\right)-\sigma_2}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Langkah selanjutnya yaitu mensubstitusi persamaan (4.5) dan (4.9) pada persamaan (4.1), yaitu

$$\begin{aligned}
rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-\sigma_1x+\sigma_2\left(-\frac{\sigma_1x}{s\left(1-\frac{y}{L}\right)-\sigma_2}\right)-\frac{\alpha x(0)}{a+x} &= 0 \\
rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-\sigma_1x-\frac{\sigma_1\sigma_2}{s\left(1-\frac{y}{L}\right)-\sigma_2}x &= 0 \\
x\left(r\left(1-\frac{x}{K}\right)-\sigma_1-\frac{\sigma_1\sigma_2}{s\left(1-\frac{y}{L}\right)-\sigma_2}\right) &= 0,
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$x = 0 \tag{4.10}$$

atau

$$r\left(1-\frac{x}{K}\right)-\sigma_1-\frac{\sigma_1\sigma_2}{s\left(1-\frac{y}{L}\right)-\sigma_2} = 0. \tag{4.11}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (4.10) pada persamaan (4.9), diperoleh

$$y = 0 \quad (4.12)$$

Sehingga dari persamaan (4.5), (4.8), (4.10), dan (4.12) diperoleh titik

$$\text{keseimbangan yang pertama yaitu } T_1 = \left(0, 0, 0, -\frac{m}{c}\right).$$

2. Titik keseimbangan kedua

Titik keseimbangan kedua diperoleh dengan mensubstitusi persamaan (4.5) pada persamaan (4.1) yaitu

$$\begin{aligned} rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\alpha x(0)}{a+x} &= 0 \\ rx - \frac{r}{K} x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2 y &= 0 \\ \sigma_2 y &= \sigma_1 x + \frac{r}{K} x^2 - rx \\ \tilde{y} &= \frac{1}{\sigma_2} \left[\sigma_1 \tilde{x} + \frac{r}{K} \tilde{x}^2 - r \tilde{x} \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Agar $\tilde{y}$ positif, maka harus dipenuhi ketaksamaan berikut

$$\begin{aligned} \sigma_1 \tilde{x} + \frac{r}{K} \tilde{x}^2 - r \tilde{x} &> 0 \\ \tilde{x} \left(\sigma_1 + \frac{r}{K} \tilde{x} - r \right) &> 0 \\ \sigma_1 + \frac{r}{K} \tilde{x} - r &> 0 \\ \frac{r}{K} \tilde{x} &> r - \sigma_1 \\ \tilde{x} &> \frac{K}{r} (r - \sigma_1). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sehingga dari persamaan (4.5), (4.8), (4.13), dan (4.14) diperoleh titik keseimbangan yang kedua yaitu $T_2 = \left(\tilde{x}, \tilde{y}, 0, -\frac{m}{c} \right)$.

3. Titik keseimbangan ketiga

Titik keseimbangan ketiga diperoleh dengan menulis persamaan (4.9) dalam bentuk $x^* = \frac{L\sigma_2 y^* - Lsy^* + sy^{*2}}{L\sigma_1}$. Selanjutnya, memodifikasi persamaan (4.1) menjadi

$$y^* = \frac{1}{\sigma_2} \left(\frac{r}{K} x^{*2} - rx^* + \sigma_1 x^* + \frac{\alpha x^* z^*}{a + x^*} \right), \quad (4.15)$$

dimana dari persamaan (4.6) dan (4.7) diperoleh $z^* = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a + x^*} - k - qE^* \right)$

dan $E^* = \frac{m}{pqz^* - c}$. Sehingga diperoleh titik keseimbangan yang ketiga yaitu $T_3 = (x^*, y^*, z^*, E^*)$. Titik keseimbangan ini merupakan titik keseimbangan interior yaitu $x^* > 0$, $y^* > 0$, $z^* > 0$, dan $E^* > 0$ apabila memenuhi syarat berikut.

$$\begin{aligned} \sigma_2 y^* - sy^* \left(1 - \frac{y^*}{L} \right) &> 0, \\ \frac{r}{K} x^{*2} - rx^* + \sigma_1 x^* + \frac{\alpha x^* z^*}{a + x^*} &> 0, \\ \frac{\beta \alpha x^*}{a + x^*} - k - qE^* &> 0, \text{ dan} \\ pqz^* - c &> 0. \end{aligned}$$

Dalam hal membicarakan eksistensi makhluk hidup, khususnya interaksi mangsa pemangsa perikanan, titik keseimbangan interior (yang semua nilainya positif) merupakan titik keseimbangan yang akan digunakan dan akan dianalisis kestabilannya. Adapun titik keseimbangan selain titik keseimbangan interior maka tidak akan dipertimbangkan dan tidak dilakukan analisis kestabilan. Hal ini didasarkan pada syarat eksistensi makhluk hidup yaitu lebih besar dari nol. Oleh karena itu, titik keseimbangan yang akan dipertimbangkan dan diuji kestabilannya hanyalah titik keseimbangan ketiga yaitu $T_3 = (x^*, y^*, z^*, E^*)$.

B. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Pada tahap ini dilakukan analisis kestabilan titik keseimbangan dengan metode linearisasi. Jika persamaan (4.1), (4.2), dan (4.3) ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} f &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\alpha x z}{a + x} \\ g &= sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \\ h &= \frac{\beta \alpha x z}{a + x} - kz - \gamma z^2 - qEz, \end{aligned} \tag{4.16}$$

maka diperoleh matriks Jacobi dari persamaan (4.16) sebagai berikut

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z}{a+x} + \frac{\alpha xz}{(a+x)^2} & \sigma_2 & -\frac{\alpha x}{a+x} \\ \sigma_1 & s - \frac{2sy}{L} - \sigma_2 & 0 \\ \frac{\beta \alpha z}{a+x} - \frac{\beta \alpha xz}{(a+x)^2} & 0 & \frac{\beta \alpha x}{a+x} - k - 2\gamma z - qE \end{pmatrix}.$$

Dengan mensubstitusi titik keseimbangan $T_3 = (x^*, y^*, z^*, E^*)$ pada matriks

Jacobi A , diperoleh

$$A^* = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} & \sigma_2 & -\frac{\alpha x^*}{a+x^*} \\ \sigma_1 & s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 & 0 \\ \frac{\beta \alpha z^*}{a+x^*} - \frac{\beta \alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} & 0 & \frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \end{pmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobi A^* adalah $|A^* - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} - \lambda & \sigma_2 & -\frac{\alpha x^*}{a+x^*} \\ \sigma_1 & s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 - \lambda & 0 \\ \frac{\beta \alpha z^*}{a+x^*} - \frac{\beta \alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} & 0 & \frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Nilai eigen λ dari persamaan karakteristik matriks Jacobi A^* diperoleh dengan tahapan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} - \lambda \right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 - \lambda \right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* - \lambda \right) \\ & - \left(\frac{\beta \alpha z^*}{a+x^*} - \frac{\beta \alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 - \lambda \right) \left(-\frac{\alpha x^*}{a+x^*} \right) \\ & - \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* - \lambda \right) \sigma_1 \sigma_2 = 0. \end{aligned}$$

Kemudian diuraikan menjadi

$$\begin{aligned} & \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \\ & - \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \lambda \\ & - \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \lambda \\ & + \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \lambda^2 - \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \lambda \\ & + \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \lambda^2 + \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \lambda^2 - \lambda^3 \\ & + \left(\frac{\beta \alpha z^*}{a+x^*} - \frac{\beta \alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \left(-\frac{\alpha x^*}{a+x^*} \right) \\ & - \left(\frac{\beta \alpha z^*}{a+x^*} - \frac{\beta \alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(-\frac{\alpha x^*}{a+x^*} \right) \lambda - \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2 \lambda = 0. \end{aligned}$$

Nilai eigen λ dengan pangkat tertinggi di tulis diawal, menyusul nilai eigen λ pangkat berikutnya dan diperoleh persamaan karakteristik berikut.

$$\begin{aligned}
& -\lambda^3 + \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \lambda^2 + \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \lambda^2 \\
& + \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \lambda^2 - \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \lambda \\
& - \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \lambda \\
& - \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \lambda - \left(\frac{\beta \alpha z^*}{a+x^*} - \frac{\beta \alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(\frac{\alpha x^*}{a+x^*} \right) \lambda + \sigma_1 \sigma_2 \lambda \\
& + \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \\
& + \left(\frac{\beta \alpha z^*}{a+x^*} - \frac{\beta \alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \left(\frac{\alpha x^*}{a+x^*} \right) - \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \sigma_1 \sigma_2 = 0
\end{aligned}$$

Persamaan karakteristik yang telah diperoleh dikali dengan -1 dan diperoleh persamaan karakteristik berikut.

$$\begin{aligned}
& \lambda^3 - \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \lambda^2 - \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \lambda^2 - \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \lambda^2 \\
& + \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \lambda \\
& + \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \lambda \\
& + \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \lambda + \left(\frac{\beta \alpha z^*}{a+x^*} - \frac{\beta \alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(\frac{\alpha x^*}{a+x^*} \right) \lambda - \sigma_1 \sigma_2 \lambda \\
& - \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \\
& - \left(\frac{\beta \alpha z^*}{a+x^*} - \frac{\beta \alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2} \right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) \left(\frac{\alpha x^*}{a+x^*} \right) + \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^* \right) \sigma_1 \sigma_2 = 0.
\end{aligned}$$

Persamaan karakteristik terakhir yang diperoleh dapat ditulis dalam bentuk

$$\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0, \quad (4.17)$$

dimana

$$\begin{aligned} p_0 = & -\left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2}\right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2\right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^*\right) \\ & - \left(\frac{\beta \alpha z^*}{a+x^*} - \frac{\beta \alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2}\right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2\right) \left(\frac{\alpha x^*}{a+x^*}\right) \\ & + \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^*\right) \sigma_1 \sigma_2, \\ p_1 = & \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2}\right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2\right) \\ & + \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2}\right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^*\right) \\ & + \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2\right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^*\right) + \left(\frac{\beta \alpha z^*}{a+x^*} - \frac{\beta \alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2}\right) \left(\frac{\alpha x^*}{a+x^*}\right) - \sigma_1 \sigma_2, \text{ dan} \\ p_2 = & -\left[\left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2}\right) + \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2\right) + \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^*\right)\right]. \end{aligned}$$

Apabila dari persamaan karakteristik (4.17) diperoleh nilai-nilai eigen yang semuanya negatif, maka titik keseimbangan $T_3 = (x^*, y^*, z^*, E^*)$ merupakan titik keseimbangan yang stabil berdasarkan Definisi 5.

Tahap selanjutnya dilakukan uji kestabilan titik keseimbangan dengan uji kestabilan Hurwitz. Titik keseimbangan $T_3 = (x^*, y^*, z^*, E^*)$ stabil asimptotik apabila dari persamaan karakteristik (4.17) diperoleh $p_0, p_1, p_2 > 0$, dan $p_2 p_1 - p_0 > 0$. Untuk lebih jelasnya tentang sifat kestabilan titik keseimbangan $T_3 = (x^*, y^*, z^*, E^*)$, akan ditunjukkan pada

simulasi numerik yang akan dibahas kemudian. Apabila titik keseimbangan $T_3 = (x^*, y^*, z^*, E^*)$ merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik, maka hal ini bermakna bahwa jika diambil nilai awal tertentu untuk masing-masing populasi, maka dalam kurun waktu yang lama, jumlah populasi mangsa zona bebas akan menuju ke titik x^* , jumlah populasi mangsa zona reservasi akan menuju ke titik y^* , jumlah populasi pemangsa menuju ke titik z^* , dan tingkat usaha pemanenan akan menuju ke titik E^* . Sehingga masing-masing populasi tidak akan mengalami kepunahan dalam waktu yang cukup lama dengan jaminan adanya titik keseimbangan yang bersifat stabil asimptotik dari model.

Hal ini merupakan jawaban dari masalah penelitian yang pertama.

C. Simulasi Numerik Penentuan Titik Keseimbangan dan Kestabilannya

Nilai-nilai parameter yang digunakan untuk simulasi dalam tesis ini mengacu pada nilai parameter yang digunakan Chakraborty dkk., (2011). Hal ini mengingat model yang ada dalam tesis ini secara umum sama dengan model Chakraborty dkk., (2011) dan hanya berbeda pada penambahan faktor pemanenan, yang mana pada tesis ini pemanenan dilakukan terhadap populasi pemangsa, sementara penelitian Chakraborty dkk., (2011) pemanenan dilakukan pada populasi mangsa zona bebas.

Tabel 2. Nilai parameter (Chakraborty dkk, 2011)

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
r	1,8	σ_1	0,25	σ_2	0,25
s	0,5	α	0,5	β	0,8
a	30	d	0,0005	γ	0,001
q	0,5	m	25		

Juga dengan mempertimbangkan beberapa penelitian lain yang relevan, digunakan parameter $K = 1.000$, $L = 1.000$, $p = 5$, $c = 5$, dan $v = 0,5$.

Pada tahap ini dilakukan simulasi numerik yang diselesaikan dengan bantuan *software* Maple 17 dengan cara menyelesaikan persamaan berikut

$$\begin{aligned}
 rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\alpha x z}{a + x} &= 0 \\
 sy \left(1 - \frac{y}{L} \right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y &= 0 \\
 \frac{\beta \alpha x z}{a + x} - k z - \gamma z^2 - q E z &= 0 \\
 (pqz - c) E - m &= 0
 \end{aligned}$$

dan diperoleh titik keseimbangan $x^* = 898,7165797$, $y^* = 965,4427230$, $z^* = 373,1056922$, dan $E^* = 0,02694650125$. Kemudian dari persamaan karakteristik (4.17) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -1,75044871967077$, $\lambda_2 = -0,654684841325410$, dan $\lambda_3 = -0,361737364203815$.

Terlihat bahwa nilai eigen yang diperoleh semuanya bernilai negatif. Dengan demikian berdasarkan Definisi 5, disimpulkan bahwa titik keseimbangan $T_3 = (x^*, y^*, z^*, E^*)$ stabil.

Selanjutnya analisis kestabilan titik keseimbangan dilakukan pula menggunakan uji kestabilan Hurwitz dan diperoleh

$$\begin{aligned}
 p_0 &= -\left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2}\right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2\right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^*\right) \\
 &\quad - \left(\frac{\beta \alpha z^*}{a+x^*} - \frac{\beta \alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2}\right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2\right) \left(\frac{\alpha x^*}{a+x^*}\right) \\
 &\quad + \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^*\right) \sigma_1 \sigma_2 \\
 &= 0,4300979809, \\
 p_1 &= \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2}\right) \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2\right) \\
 &\quad + \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2}\right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^*\right) \\
 &\quad + \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2\right) \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^*\right) + \left(\frac{\beta \alpha z^*}{a+x^*} - \frac{\beta \alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2}\right) \left(\frac{\alpha x^*}{a+x^*}\right) - \sigma_1 \sigma_2 \\
 &= 2,048628021, \\
 p_2 &= -\left(\left(r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z^*}{a+x^*} + \frac{\alpha x^* z^*}{(a+x^*)^2}\right) + \left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2\right) + \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a+x^*} - k - 2\gamma z^* - qE^*\right)\right) \\
 &= 2,780416788,
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 p_2 p_1 - p_0 &= (2,780416788) \cdot (2,048628021) - (0,4300979809) \\
 &= 5,265941761 > 0.
 \end{aligned}$$

Karena $p_0 > 0$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, dan $p_2 p_1 - p_0 > 0$, maka menurut uji kestabilan Hurwitz, titik keseimbangan $T_3 = (x^*, y^*, z^*, E^*)$ merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik. Hal ini bermakna bahwa jika diambil nilai awal tertentu (misalkan 500) untuk masing-masing populasi, maka dalam waktu yang lama jumlah populasi mangsa zona bebas menuju ke 898,7165797, jumlah populasi mangsa zona reservasi menuju ke 965,4427230, jumlah populasi pemangsa menuju ke 373,1056922, dan tingkat usaha pemanenan akan menuju ke 0,02694650125.

D. Kontrol Optimal Model Bioekonomi Sistem Mangsa Pemangsa

Sumber Daya Perikanan

Kontrol optimal model bioekonomi sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan pada tesis ini yaitu memaksimumkan total keuntungan bersih diskonto. Sehingga masalah kontrol optimalnya dirumuskan sebagai berikut.

Memaksimumkan

$$J(h) = \int_{t_0}^{t_f} e^{-\delta t} \left[(p - vh)h - \frac{ch}{qz} \right] dt \quad (4.18)$$

dengan kendala keadaan

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\alpha x z}{a+x} \\
\frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L} \right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{\beta \alpha x z}{a+x} - kz - \gamma z^2 - h
\end{aligned} \tag{4.19}$$

dengan kendala variabel kontrol $0 \leq h \leq h_{\max}$. Permasalahan kontrol optimal persamaan (4.18) dan (4.19) akan diselesaikan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Berikut ini langkah-langkah penyelesaian masalah kontrol optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

Langkah 1: Membentuk fungsi Hamiltonian.

$$\begin{aligned}
H &= \left[(p - vh)h - \frac{ch}{qz} \right] + \lambda_1 \left(rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\alpha x z}{a+x} \right) \\
&\quad + \lambda_2 \left(sy \left(1 - \frac{y}{L} \right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \right) + \lambda_3 \left(\frac{\beta \alpha x z}{a+x} - kz - \gamma z^2 - h \right)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Langkah 2: Memaksimumkan H terhadap vektor kontrol h .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial h} &= 0 \\
-2hv + p - \frac{c}{qz(t)} - \lambda_3 &= 0 \\
\tilde{h} &= \frac{1}{2v} \left(p - \frac{c}{qz} - \lambda_3 \right)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

dimana $\tilde{h}$ merupakan tingkat pemanenan optimal yang akan ditampilkan plot lintasannya pada pembahasan selanjutnya.

Sehingga diperoleh bentuk maksimum fungsi Hamiltoniannya sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 H = & \left[\left(p - v\tilde{h} \right) \tilde{h} - \frac{c\tilde{h}}{qz} \right] + \lambda_1 \left(rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\alpha xz}{a+x} \right) \\
 & + \lambda_2 \left(sy \left(1 - \frac{y}{L} \right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \right) + \lambda_3 \left(\frac{\beta \alpha xz}{a+x} - kz - \gamma z^2 - \tilde{h} \right).
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Langkah 3: Mendapatkan persamaan keadaan, kokeadaan dan kondisi transversal.

a. Persamaan keadaan

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \frac{\alpha xz}{a+x} \\
 \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = sy \left(1 - \frac{y}{L} \right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \\
 \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \frac{\beta \alpha xz}{a+x} - kz - \gamma z^2 - \tilde{h}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

b. Persamaan kokeadaan

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_1 &= \delta \lambda_1 - \lambda_1 \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{rx}{K} - \sigma_1 - \frac{\alpha z}{a+x} + \frac{\alpha xz}{(a+x)^2} \right) - \lambda_2 \sigma_1 \\
 &\quad - \lambda_3 \left(\frac{\alpha \beta z}{a+x} - \frac{\alpha \beta xz}{(a+x)^2} \right) \\
 \dot{\lambda}_2 &= \delta \lambda_2 - \left(\lambda_1 \sigma_2 + \lambda_2 \left(s \left(1 - \frac{y}{L} \right) - \frac{sy}{L} - \sigma_2 \right) \right) \\
 \dot{\lambda}_3 &= \delta \lambda_3 - \left(\frac{ch}{qz^2} - \lambda_1 \frac{\alpha x}{a+x} + \lambda_3 \left(\frac{\beta \alpha x}{a+x} - k - 2\gamma z \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

dan kondisi transversal yang harus dipenuhi yaitu

$$\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_3(t_f) = 0. \quad (4.25)$$

Dengan menyelesaikan kondisi optimal (4.21), persamaan keadaan (4.23), kendala ko-keadaan (4.24), dan kondisi transversal (4.25), akan didapatkan panen $(\tilde{h})$ yang optimal pada model bioekonomi sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan.

Menyelesaikan secara analitik kondisi optimal persamaan (4.21), persamaan keadaan (4.23), persamaan ko-keadaan (4.24), dan kondisi transversal (4.25) tidaklah mudah. Oleh karena itu, permasalahan ini akan diselesaikan secara numerik. Penyelesaian numeriknya akan diselesaikan menggunakan *Forward Backward Sweep Method*, dimana prosedur penyelesaiannya telah dijelaskan pada bab sebelumnya.

E. Penyelesaian Numerik

Pada tahap ini, langkah pertama yang harus dilakukan adalah mentransformasikan masalah kontrol optimal model bioekonomi mangsa pemangsa sumber daya perikanan dalam bentuk diskrit. Diskritisasi dilakukan pada interval $[t_0, t_f]$ dengan *step size* $h_0 = \frac{t_f - t_0}{N}$ dan grid $t_i = t_0 + ih_0$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$), sehingga $t_f = t_N$. Selanjutnya, persamaan keadaan dilakukan diskritisasi beda maju karena diketahui nilai awal dari

x , y , dan z kemudian untuk persamaan keadaan dilakukan diskritisasi beda mundur karena diketahui nilai akhir dari λ_1, λ_2 , dan λ_3 yang diperoleh dari kondisi transversal yang harus dipenuhi.

Hasil diskritisasi persamaan keadaan (4.23) disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{x_{i+1} - x_i}{h_0} &= rx_i \left(1 - \frac{x_i}{K}\right) - \sigma_1 x_i + \sigma_2 y_i - \frac{\alpha x_i z_i}{a + x_i} \\ x_{i+1} - x_i &= h_0 \left[rx_i \left(1 - \frac{x_i}{K}\right) - \sigma_1 x_i + \sigma_2 y_i - \frac{\alpha x_i z_i}{a + x_i} \right] \\ x_{i+1} &= x_i + h_0 \left[rx_i \left(1 - \frac{x_i}{K}\right) - \sigma_1 x_i + \sigma_2 y_i - \frac{\alpha x_i z_i}{a + x_i} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{y_{i+1} - y_i}{h_0} &= sy_i \left(1 - \frac{y_i}{L}\right) + \sigma_1 x_i - \sigma_2 y_i \\ y_{i+1} - y_i &= h_0 \left[sy_i \left(1 - \frac{y_i}{L}\right) + \sigma_1 x_i - \sigma_2 y_i \right] \\ y_{i+1} &= y_i + h_0 \left[sy_i \left(1 - \frac{y_i}{L}\right) + \sigma_1 x_i - \sigma_2 y_i \right],\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\frac{z_{i+1} - z_i}{h_0} &= \frac{\beta \alpha x_i z_i}{a + x_i} - kz_i - \gamma z_i^2 - h_i \\ z_{i+1} - z_i &= h_0 \left[\frac{\beta \alpha x_i z_i}{a + x_i} - kz_i - \gamma z_i^2 - h_i \right] \\ z_{i+1} &= z_i + h_0 \left[\frac{\beta \alpha x_i z_i}{a + x_i} - kz_i - \gamma z_i^2 - h_i \right].\end{aligned}$$

Kemudian hasil diskritisasi persamaan keadaan (4.24) disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_1^{N-i} - \lambda_1^{N-i-1}}{h_0} &= \delta \lambda_1^{N-i} - \lambda_1^{N-i} r \left(1 - \frac{x_{N-i}}{K} \right) + \lambda_1^{N-i} \frac{rx_{N-i}}{K} + \lambda_1^{N-i} \sigma_1 + \lambda_1^{N-i} \frac{\alpha z_{N-i}}{a + x_{N-i}} \\
&\quad - \lambda_1^{N-i} \frac{\alpha x_{N-i} z_{N-i}}{(a + x_{N-i})^2} - \lambda_2^{N-i} \sigma_1 - \lambda_3^{N-i} \left(\frac{\alpha \beta z_{N-i}}{a + x_{N-i}} - \frac{\alpha \beta x_{N-i} z_{N-i}}{(a + x_{N-i})^2} \right) \\
\lambda_1^{N-i} - \lambda_1^{N-i-1} &= h_0 \delta \lambda_1^{N-i} - h_0 \lambda_1^{N-i} r \left(1 - \frac{x_{N-i}}{K} \right) + h_0 \lambda_1^{N-i} \frac{rx_{N-i}}{K} + h_0 \lambda_1^{N-i} \sigma_1 + h_0 \lambda_1^{N-i} \frac{\alpha z_{N-i}}{a + x_{N-i}} \\
&\quad - h_0 \lambda_1^{N-i} \frac{\alpha x_{N-i} z_{N-i}}{(a + x_{N-i})^2} - h_0 \lambda_2^{N-i} \sigma_1 - h_0 \lambda_3^{N-i} \left(\frac{\alpha \beta z_{N-i}}{a + x_{N-i}} - \frac{\alpha \beta x_{N-i} z_{N-i}}{(a + x_{N-i})^2} \right) \\
\lambda_1^{N-i-1} &= \lambda_1^{N-i} - h_0 \delta \lambda_1^{N-i} + h_0 \lambda_1^{N-i} r \left(1 - \frac{x_{N-i}}{K} \right) - h_0 \lambda_1^{N-i} \frac{rx_{N-i}}{K} - h_0 \lambda_1^{N-i} \sigma_1 - h_0 \lambda_1^{N-i} \frac{\alpha z_{N-i}}{a + x_{N-i}} \\
&\quad + h_0 \lambda_1^{N-i} \frac{\alpha x_{N-i} z_{N-i}}{(a + x_{N-i})^2} + h_0 \lambda_2^{N-i} \sigma_1 + h_0 \lambda_3^{N-i} \left(\frac{\alpha \beta z_{N-i}}{a + x_{N-i}} - \frac{\alpha \beta x_{N-i} z_{N-i}}{(a + x_{N-i})^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_2^{N-i} - \lambda_2^{N-i-1}}{h_0} &= \delta \lambda_2^{N-i} - \left(\lambda_1^{N-i} \sigma_2 + \lambda_2^{N-i} \left(s \left(1 - \frac{y_{N-i}}{L} \right) - \frac{sy_{N-i}}{L} - \sigma_2 \right) \right) \\
\lambda_2^{N-i} - \lambda_2^{N-i-1} &= h_0 \left[\delta \lambda_2^{N-i} - \left(\lambda_1^{N-i} \sigma_2 + \lambda_2^{N-i} \left(s \left(1 - \frac{y_{N-i}}{L} \right) - \frac{sy_{N-i}}{L} - \sigma_2 \right) \right) \right] \\
\lambda_2^{N-i-1} &= \lambda_2^{N-i} - h_0 \left[\delta \lambda_2^{N-i} - \left(\lambda_1^{N-i} \sigma_2 + \lambda_2^{N-i} \left(s \left(1 - \frac{y_{N-i}}{L} \right) - \frac{sy_{N-i}}{L} - \sigma_2 \right) \right) \right],
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_3^{N-i} - \lambda_3^{N-i-1}}{h_0} &= \delta \lambda_3^{N-i} - \left(\frac{ch_{N-i}}{q(z_{N-i})^2} - \lambda_1^{N-i} \frac{\alpha x_{N-i}}{a + x_{N-i}} + \lambda_3^{N-i} \left(\frac{\beta \alpha x_{N-i}}{a + x_{N-i}} - k - 2\gamma z_{N-i} \right) \right) \\
\lambda_3^{N-i} - \lambda_3^{N-i-1} &= h_0 \left[\delta \lambda_3^{N-i} - \left(\frac{ch_{N-i}}{q(z_{N-i})^2} - \lambda_1^{N-i} \frac{\alpha x_{N-i}}{a + x_{N-i}} + \lambda_3^{N-i} \left(\frac{\beta \alpha x_{N-i}}{a + x_{N-i}} - k - 2\gamma z_{N-i} \right) \right) \right] \\
\lambda_3^{N-i-1} &= \lambda_3^{N-i} - h_0 \left[\delta \lambda_3^{N-i} - \left(\frac{ch_{N-i}}{q(z_{N-i})^2} - \lambda_1^{N-i} \frac{\alpha x_{N-i}}{a + x_{N-i}} + \lambda_3^{N-i} \left(\frac{\beta \alpha x_{N-i}}{a + x_{N-i}} - k - 2\gamma z_{N-i} \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Setelah didapatkan diskritisasi persamaan keadaan dan persamaan kekeadaan, hasil diskritisasi tersebut diimplementasikan dalam program komputer untuk simulasi. Simulasi numerik dari masalah kontrol optimal dilakukan dengan *Forward-Backward Sweep Method* dan dijalankan dengan bantuan *software* MATLAB 7.8.0.

F. Simulasi

Diberikan kondisi awal untuk setiap keadaan $x_0 = y_0 = z_0 = 500$ dengan $t_0 = 0$ dan $t_f = 10$. Diperoleh kurva perilaku sistem dan lintasan pemanen optimal seperti pada gambar berikut.

Gambar 3. Perilaku sistem dengan pemanenan pada populasi pemangsa (z)

Gambar 4. Lintasan optimal laju pemanenan pada populasi pemangsa (z) selama 10 tahun.

Perilaku sistem dengan pemanenan pada populasi pemangsa (z) Gambar 3. menunjukkan bahwa pemanenan yang dilakukan memberikan pengaruh yang cukup signifikan terhadap populasi yang dipanen, dimana dengan nilai awal 500, jumlah populasi pemangsa sejak awal tidak mengalami pertumbuhan, bahkan cenderung berkurang hingga stabil menuju ke jumlah tertentu yang kurang dari 400. Berbeda halnya dengan populasi mangsa pada zona bebas (x) dan populasi mangsa pada zona reservasi (y) yang mengalami pertumbuhan yang cukup signifikan. Hal ini disebabkan karena populasi mangsa pada zona bebas dan mangsa pada zona reservasi tidak ada pemanenan.

Perilaku sistem pada Gambar 3. juga menunjukkan bahwa jumlah stabil populasi mangsa pada zona reservasi lebih besar dari jumlah stabil mangsa pada zona bebas. Hal ini disebabkan karena populasi mangsa pada zona reservasi tidak ada kontak langsung dengan populasi pemangsa, dengan kata lain pemangsa tidak memangsa pada zona reservasi. Sehingga populasi mangsa pada zona reservasi bisa tumbuh dengan baik dan mencapai jumlah stabil lebih besar dari jumlah stabil populasi mangsa pada zona bebas. Sisi lain populasi mangsa zona reservasi bisa mencapai jumlah stabil lebih tinggi dari populasi mangsa zona bebas disebabkan oleh populasi mangsa zona bebas yang meskipun tidak ada pemanenan yang dilakukan terhadapnya secara langsung namun populasi mangsa pada zona bebas dimangsa oleh populasi pemangsa, sehingga memberi pengaruh pada pertumbuhan dan jumlah stabil populasi ini.

Gambar 4. menunjukkan lintasan optimal laju pemanenan pada populasi pemangsa dalam kurun waktu 10 tahun. Terlihat bahwa dengan nilai awal 500 yang diberikan pada awal tahun diperoleh laju pemanenan sebesar 2,9 per tahun dan terus tumbuh sampai pada tahun ke-sepuluh, diperoleh laju pemanenan sebesar 5 per tahun. Kemudian dilakukan pemanenan misal hanya 4 tahun, maka lintasan optimalnya akan berbeda jika pemanenan berlangsung selama 10 tahun. Besar laju pemanenan tiap tahun selama 4 tahun akan lebih besar daripada laju pemanenan tiap tahun yang berlangsung selama 10 tahun. Dimana jika dilakukan

pemanenan selama 4 tahun, maka akan diperoleh lintasan pemanenan optimal yang juga tidak melebihi 5 per tahun. Hal ini berdasarkan pada beberapa plot lintasan pemanenan optimal yang telah dilakukan (tidak ditampilkan dalam tesis ini) selama beberapa tahun (2, 4, 6, 8, dan 10 tahun), lintasan pemanenan optimal yang diperoleh tidak pernah melebihi laju pemanenan 5 per tahun dengan beberapa variasi waktu tersebut. Sehingga disimpulkan bahwa laju pemanenan optimal yang diperoleh berbeda setiap tahunnya bergantung pada jumlah tahun dilakukan pemanenan.

Hal ini merupakan jawaban dari masalah penelitian yang kedua.

G. Total Laba Bersih Diskonto

Sebagaimana telah disebutkan bahwa fungsi keuntungan dalam tesis ini adalah

$$J(h) = \int_{t_0}^{t_f} e^{-\delta t} \left[(p - vh)h - \frac{ch}{qz} \right] dt .$$

Fungsi keuntungan dalam bentuk integral ini akan diselesaikan menggunakan integral numerik yaitu Kaidah Simpson 1/3, dimana untuk nilai t, h , dan z dapat dilihat pada Lampiran 2. yang diperoleh dari program MATLAB 7.8.0 hasil run Gambar 3. dan Gambar 4.

Dengan menggunakan jarak antara titik $d = 0,01$, diperoleh

subinterval $n = \frac{t_f - t_0}{d} = \frac{10 - 0}{0.01} = 1000$. Misalkan $F = e^{-\delta t} \left[(p - vh)h - \frac{ch}{qz} \right]$,

dengan menggunakan Kaidah Simpson 1/3 diperoleh nilai integral dari fungsi keuntungan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 J(h) &= \int_{t_0}^{t_f} F dt \\
 &\approx \frac{d}{3} \left(F_0 + 4 \sum_{i=1,3,5}^{999} F_i + 2 \sum_{i=2,4,6}^{998} F_i + F_{1000} \right) \\
 &\approx \frac{d}{3} (F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + 2F_5 + \dots + 2F_{998} + 4F_{999} + F_{1000}) \\
 &\approx \frac{0,01}{3} (10,22178936 + 4 \cdot 10,22411644 + 2 \cdot 10,2264423 + 4 \cdot 10,22855856 \\
 &\quad + 2 \cdot 10,23088209 + 4 \cdot 10,2332044 + \dots + 2 \cdot 12,24518176 \\
 &\quad + 4 \cdot 12,24513715 + 12,24524503683) \\
 &\approx \frac{0,01}{3} (33292,31704) \\
 &\approx 110,9743901.
 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh total laba bersih diskonto dalam kurun waktu 10 tahun sekitar 110,9743901.

Gambar 5. Total laba bersih diskonto

Luas daerah yang diarsir pada Gambar 5. menunjukkan total laba bersih diskonto dalam kurun waktu 10 tahun.

Hal ini merupakan jawaban masalah penelitian yang ketiga.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan analisis dari hasil pembahasan, beberapa kesimpulan yang dapat diambil antara lain

1. Titik keseimbangan interior $T_3 = (x^*, y^*, z^*, E^*)$ dengan

$$x^* = \frac{L\sigma_2 y^* - Lsy^{*2} + sy^{*2}}{L\sigma_1},$$

$$y^* = \frac{1}{\sigma_2} \left(\frac{r}{K} x^{*2} - rx^* + \sigma_1 x^* + \frac{\alpha x^* z^*}{a + x^*} \right),$$

$$z^* = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\beta \alpha x^*}{a + x^*} - k - qE^* \right), \text{ dan}$$

$$E^* = \frac{m}{pqz^* - c}$$

merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik.

2. Masalah kontrol optimal model bioekonomi sistem mangsa pemangsa sumber daya perikanan dengan pemanenan pada populasi pemangsa dapat diselesaikan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.
3. Total laba bersih diskonto dapat diperoleh dengan menggunakan integral numerik Kaidah Simpson 1/3.

B. Saran

Sebagai upaya tindak lanjut dari penelitian ini, penulis memberi saran yaitu dicari bentuk kontrol optimal model bioekonomi sistem mangsa pemangsa perikanan dimana pemanenan tidak hanya dilakukan pada populasi pemangsa, namun dilakukan pada semua populasi yaitu populasi mangsa zona bebas (x), populasi mangsa zona reservasi (y), dan populasi pemangsa (z).

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. dan Rorres, C. 2005. *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Chakraborty, K., Chakraborty, M., dan Kar, T.K. 2011. Bifurcation and Control of a Bioeconomic Model of a Prey-Predator System with a Time Delay. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*. 5: 613-625.
- Chakraborty, K., Chakraborty, M., dan Kar, T.K. 2011. Optimal Control of Harvest and Bifurcation of Prey-Predator Model with Stage Structure. *Applied Mathematics And Computation*. 217: 8778-8792.
- Fahmi. 2000. Jenis Ikan Pemangsa di Tambak Tradisional dan Cara Penanganannya. *Jurnal Oseana*. 25(1): 21-30.
- Haberman, R. 1977. *Mathematical Models An Introduction to Applied Mathematics*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Jeffries, C. 1989. *Mathematical Modeling in Ecology*. Birakhaauser, Boston.
- Liu, C., Zhang, Q., dan Huang, J. 2011. The Dynamics and Control of a Harvested Differential-Algebraic Prey-Predator Model. *International Journal of Information and Systems Sciences*. 7(1): 103-113.
- Munir, R. 2013. *Metode Numerik*. Informatika, Bandung.
- Prastiwi, L. 2013. *Kontrol Optimal Model Bioekonomi Mangsa-Pemangsa dengan Waktu Tunda*. Tesis tidak diterbitkan. Surabaya: Program Pascasarjana ITS.
- Subiono. 2013. *Sistem Linier dan Kontrol Optimal*. Jurusan Matematika FMIPA-ITS, Surabaya.
- Toaha, S. 2013. *Pemodelan Matematika dalam Dinamika Populasi*. Dua Satu Press, Makassar.
- Willems, J.L. 1970. *Stability Theory of Dynamical Systems*. Thomas Nelson & Sons, London.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Sintaksis program MATLAB 7.8.0 untuk gambar 3. dan 4.

```
%===== Masalah Kontrol Optimal =====
%===== Model Bioekonomi Sistem Mangsa-Pemangsa =====
clear all;
clc;
%===== nilai parameter =====
r=1.8;          % rasio pertumbuhan intrinsik mangsa di zona I
sigma1=0.25;    % laju migrasi dari zona I ke zona II
alpha=0.5;      % peningkatan maksimal relatif dari pemangsa
sigma2=0.25;    % laju migrasi dari zona II ke zona I
gamma=0.001;    % koefisien intra-spesifik predator
L=1000;         % carrying capacity mangsa di zona II
K=1000;         % carrying capacity mangsa di zona I
a=30;          % konstanta michealis-menten
s=0.5;         % rasio pertumbuhan intrinsik mangsa di zona II
beta=0.8;       % laju predator mengkonsumsi mangsa
d=0.0005;      % laju kematian pemangsa
c=5;           % biaya penangkapan
p=5;           % harga ikan per unit tangkapan
q=0.5;         % koefisien daya tangkap
v=0.5;         % konstanta ekonomi
delta=0.001;   % laju diskon
%=====

N=1000;        % iterasi yang diinginkan
test= delta + 1;
t0=0;
tf=10;
T=tf-t0;
h=T/N;
t=linspace (0,T,N+1);
x1=zeros(1,N+1);
x2=zeros(1,N+1);
x3=zeros(1,N+1);

x1(1)=500;
x2(1)=500;
x3(1)=500;

lambda1=zeros(1,N+1);
lambda2=zeros(1,N+1);
lambda3=zeros(1,N+1);

u=zeros(1,N+1)+0.5;

while(test > delta)
```

```

    oldu = u;

    for i=1:N
        m1=r*x1(i)*(1-x1(i)/K)-sigma1*x1(i)+sigma2*x2(i)
            -((alpha*x1(i)*x3(i))/(a+x1(i)));
        m2=s*x2(i)*(1-x2(i)/L)+sigma1*x1(i)-sigma2*x2(i);
        m3=((beta*alpha*x1(i)*x3(i))/(a+x1(i)))-d*x3(i)
            -gamma*(x3(i)^2)-u(i);
        x1(i+1)=x1(i)+h*m1;
        x2(i+1)=x2(i)+h*m2;
        x3(i+1)=x3(i)+h*m3;
    end

    for i=1:N
        j=N+1-i;
        m1=delta*lambda1(j)-(lambda1(j)*(r*(1-((2*x1(j)/K))
            -sigma1-(alpha*x3(j))/(a+x1(j)))
            +((alpha*x1(j)*x3(j))/(a+x1(j)^2))))
            + (lambda2(j)*sigma1);
            +lambda3(j)*((alpha*beta*x3(j))/(a+x1(j)))
            -((alpha*beta*x1(j)*x3(j))/(a+x1(j)^2));
        m2=delta*lambda2(j)-(lambda1(j)*sigma2
            +lambda2(j)*(s-(2*s*x2(j)/L))-sigma2);
        m3=delta*lambda3(j)-c*u(j)/(q*(x3(j)^2)
            -lambda1(j)*alpha*x1(j)/(a+x1(j))
            +lambda3(j)*beta*alpha*x1(j)/(a+x1(j))
            -d-2*gamma*x3(j);
        lambda1(j)= lambda1(j+1) - h*m1;
        lambda2(j)= lambda2(j+1) - h*m2;
        lambda3(j)= lambda3(j+1) - h*m3;
    end

    temp=(p-(c/(q.*x3))-lambda3)/(2*v);
    u1 = min(150, max(0,temp));
    u = 0.5*(u1 + oldu);

    test = sum(abs(oldu - u));
end

y(1,:)=t;
y(2,:)=x1;
y(3,:)=x2;
y(4,:)=x3;
y(5,:)=u;

t
u

x1
x2
x3

```

```
figure(1)
p1=plot(y(1,:),y(2,:), 'm',y(1,:),y(3,:), 'b',y(1,:),y(4,:), 'g');
set(p1,'LineWidth',2)
title(['Jumlah Populasi x, y, dan z dengan N=',num2str(N)])
xlabel('Waktu (t)')
ylabel('Populasi')
legend('x(t)', 'y(t)', 'z(t)')
grid on;

figure(2)
p2=plot(y(1,:),y(5,:));
set(p2,'LineWidth',2,'Color','red')
xlabel('Waktu')
ylabel('Panen')
title(['Pemanenan dengan N=',num2str(N)])
grid on
```

Lampiran 2. Nilai-nilai t , h , dan z yang diperoleh dari program

MATLAB 7.8.0 hasil run gambar 3. dan 4.

r	t_r	h_r	z_r	F_r
0	0	2.8927	500	10.22178936
1	0.01	2.8939	499.3554	10.22411644
2	0.02	2.8951	498.7152	10.2264423
3	0.03	2.8962	498.0794	10.22855856
4	0.04	2.8974	497.448	10.23088209
5	0.05	2.8986	496.821	10.2332044
6	0.06	2.8997	496.1982	10.23531748
7	0.07	2.9009	495.5797	10.23763745
8	0.08	2.9021	494.9654	10.23995618
9	0.09	2.9032	494.3553	10.24206606
10	0.1	2.9044	493.7494	10.24438247
11	0.11	2.9055	493.1475	10.24649024
12	0.12	2.9066	492.5497	10.24859701
13	0.13	2.9078	491.956	10.25090996
14	0.14	2.9089	491.3662	10.25301463
15	0.15	2.91	490.7804	10.2551183
16	0.16	2.9111	490.1986	10.25722097
17	0.17	2.9122	489.6206	10.25932264
18	0.18	2.9134	489.0465	10.26162989
19	0.19	2.9145	488.4762	10.26372944
20	0.2	2.9156	487.9097	10.26582799
21	0.21	2.9167	487.3469	10.26792553
22	0.22	2.9178	486.7879	10.27002206
23	0.23	2.9189	486.2325	10.27211758
24	0.24	2.9199	485.6809	10.27400622
25	0.25	2.921	485.1328	10.27609984
26	0.26	2.9221	484.5883	10.27819245
27	0.27	2.9232	484.0474	10.28028405
28	0.28	2.9243	483.5101	10.28237465
29	0.29	2.9253	482.9762	10.28425889
30	0.3	2.9264	482.4458	10.28634756
31	0.31	2.9275	481.9188	10.28843522
32	0.32	2.9285	481.3953	10.29031687
33	0.33	2.9296	480.8751	10.2924026
34	0.34	2.9306	480.3583	10.29428254
35	0.35	2.9317	479.8448	10.29636636

36	0.36	2.9327	479.3346	10.29824459
37	0.37	2.9337	478.8277	10.30012202
38	0.38	2.9348	478.324	10.302203
39	0.39	2.9358	477.8236	10.30407872
40	0.4	2.9368	477.3263	10.30595363
41	0.41	2.9379	476.8322	10.30803177
42	0.42	2.9389	476.3412	10.30990495
43	0.43	2.9399	475.8533	10.31177733
44	0.44	2.9409	475.3685	10.3136489
45	0.45	2.9419	474.8867	10.31551965
46	0.46	2.943	474.408	10.31759311
47	0.47	2.944	473.9323	10.31946214
48	0.48	2.945	473.4596	10.32133036
49	0.49	2.946	472.9898	10.32319775
50	0.5	2.947	472.5229	10.32506433
51	0.51	2.948	472.059	10.3269301
52	0.52	2.9489	471.5979	10.32859217
53	0.53	2.9499	471.1397	10.3304564
54	0.54	2.9509	470.6843	10.33231981
55	0.55	2.9519	470.2318	10.33418241
56	0.56	2.9529	469.782	10.33604417
57	0.57	2.9538	469.335	10.33770275
58	0.58	2.9548	468.8907	10.33956298
59	0.59	2.9558	468.4492	10.34142238
60	0.6	2.9568	468.0103	10.34328095
61	0.61	2.9577	467.5742	10.34493675
62	0.62	2.9587	467.1406	10.34679376
63	0.63	2.9596	466.7098	10.3484482
64	0.64	2.9606	466.2815	10.35030367
65	0.65	2.9615	465.8558	10.35195674
66	0.66	2.9625	465.4327	10.35381066
67	0.67	2.9634	465.0122	10.35546238
68	0.68	2.9644	464.5941	10.35731472
69	0.69	2.9653	464.1786	10.35896506
70	0.7	2.9662	463.7656	10.36061478
71	0.71	2.9672	463.355	10.36246482
72	0.72	2.9681	462.9469	10.36411316
73	0.73	2.969	462.5413	10.36576087
74	0.74	2.97	462.138	10.36760861
75	0.75	2.9709	461.7372	10.36925494
76	0.76	2.9718	461.3387	10.37090062

77	0.77	2.9727	460.9425	10.37254564
78	0.78	2.9736	460.5487	10.37419003
79	0.79	2.9746	460.1573	10.376034
80	0.8	2.9755	459.7681	10.377677
81	0.81	2.9764	459.3812	10.37931936
82	0.82	2.9773	458.9966	10.38096107
83	0.83	2.9782	458.6142	10.38260213
84	0.84	2.9791	458.2341	10.38424255
85	0.85	2.98	457.8561	10.3858823
86	0.86	2.9809	457.4804	10.38752141
87	0.87	2.9818	457.1069	10.38915987
88	0.88	2.9827	456.7355	10.39079767
89	0.89	2.9836	456.3662	10.39243481
90	0.9	2.9844	455.9991	10.39387213
91	0.91	2.9853	455.6341	10.39550806
92	0.92	2.9862	455.2712	10.39714333
93	0.93	2.9871	454.9104	10.39877795
94	0.94	2.988	454.5517	10.40041192
95	0.95	2.9888	454.195	10.4018465
96	0.96	2.9897	453.8404	10.40347924
97	0.97	2.9906	453.4877	10.4051113
98	0.98	2.9914	453.1371	10.40654427
99	0.99	2.9923	452.7885	10.40817512
100	1	2.9932	452.4418	10.40980529
101	1.01	2.994	452.0971	10.41123663
102	1.02	2.9949	451.7544	10.41286558
103	1.03	2.9958	451.4136	10.41449387
104	1.04	2.9966	451.0747	10.41592357
105	1.05	2.9975	450.7377	10.41755061
106	1.06	2.9983	450.4026	10.41897925
107	1.07	2.9992	450.0694	10.42060505
108	1.08	3	449.738	10.42203262
109	1.09	3.0009	449.4085	10.42365718
110	1.1	3.0017	449.0808	10.42508368
111	1.11	3.0025	448.755	10.42650969
112	1.12	3.0034	448.4309	10.42813241
113	1.13	3.0042	448.1087	10.42955735
114	1.14	3.005	447.7882	10.43098178
115	1.15	3.0059	447.4695	10.43260267
116	1.16	3.0067	447.1526	10.43402604
117	1.17	3.0075	446.8374	10.43544889

118	1.18	3.0084	446.5239	10.43706794
119	1.19	3.0092	446.2122	10.43848972
120	1.2	3.01	445.9022	10.439911
121	1.21	3.0108	445.5939	10.44133177
122	1.22	3.0117	445.2872	10.44294838
123	1.23	3.0125	444.9822	10.44436806
124	1.24	3.0133	444.6789	10.44578724
125	1.25	3.0141	444.3773	10.44720593
126	1.26	3.0149	444.0772	10.44862408
127	1.27	3.0157	443.7788	10.45004174
128	1.28	3.0165	443.4821	10.45145891
129	1.29	3.0174	443.1869	10.45307131
130	1.3	3.0182	442.8933	10.45448737
131	1.31	3.019	442.6013	10.45590292
132	1.32	3.0198	442.3108	10.45731795
133	1.33	3.0206	442.0219	10.45873247
134	1.34	3.0214	441.7346	10.46014649
135	1.35	3.0222	441.4488	10.46156
136	1.36	3.023	441.1645	10.46297298
137	1.37	3.0238	440.8818	10.46438547
138	1.38	3.0246	440.6005	10.46579743
139	1.39	3.0254	440.3208	10.46720889
140	1.4	3.0261	440.0425	10.46842498
141	1.41	3.0269	439.7657	10.46983548
142	1.42	3.0277	439.4904	10.47124547
143	1.43	3.0285	439.2165	10.47265494
144	1.44	3.0293	438.9441	10.47406389
145	1.45	3.0301	438.6731	10.47547233
146	1.46	3.0309	438.4035	10.47688024
147	1.47	3.0316	438.1354	10.47809337
148	1.48	3.0324	437.8686	10.47950032
149	1.49	3.0332	437.6033	10.48090677
150	1.5	3.034	437.3393	10.48231268
151	1.51	3.0348	437.0767	10.48371807
152	1.52	3.0355	436.8155	10.48492908
153	1.53	3.0363	436.5557	10.48633352
154	1.54	3.0371	436.2972	10.48773743
155	1.55	3.0378	436.04	10.48894719
156	1.56	3.0386	435.7842	10.49035013
157	1.57	3.0394	435.5297	10.49175255
158	1.58	3.0402	435.2765	10.49315443

159	1.59	3.0409	435.0246	10.49436249
160	1.6	3.0417	434.774	10.49576341
161	1.61	3.0424	434.5248	10.49697067
162	1.62	3.0432	434.2767	10.4983706
163	1.63	3.044	434.03	10.49977002
164	1.64	3.0447	433.7845	10.500976
165	1.65	3.0455	433.5403	10.50237443
166	1.66	3.0462	433.2974	10.50357961
167	1.67	3.047	433.0556	10.50497705
168	1.68	3.0478	432.8152	10.50637399
169	1.69	3.0485	432.5759	10.50757787
170	1.7	3.0493	432.3378	10.50897381
171	1.71	3.05	432.101	10.51017687
172	1.72	3.0508	431.8654	10.51157184
173	1.73	3.0515	431.6309	10.51277406
174	1.74	3.0523	431.3977	10.51416804
175	1.75	3.053	431.1656	10.51536943
176	1.76	3.0538	430.9347	10.51676242
177	1.77	3.0545	430.7049	10.51796297
178	1.78	3.0553	430.4763	10.51935496
179	1.79	3.056	430.2489	10.52055469
180	1.8	3.0568	430.0226	10.52194569
181	1.81	3.0575	429.7974	10.52314457
182	1.82	3.0582	429.5734	10.52434308
183	1.83	3.059	429.3505	10.52573262
184	1.84	3.0597	429.1286	10.52693027
185	1.85	3.0605	428.9079	10.52831881
186	1.86	3.0612	428.6883	10.52951563
187	1.87	3.0619	428.4698	10.53071206
188	1.88	3.0627	428.2524	10.53209915
189	1.89	3.0634	428.0361	10.53329474
190	1.9	3.0642	427.8208	10.53468081
191	1.91	3.0649	427.6066	10.53587555
192	1.92	3.0656	427.3934	10.53706988
193	1.93	3.0664	427.1813	10.53845449
194	1.94	3.0671	426.9703	10.539648
195	1.95	3.0678	426.7603	10.5408411
196	1.96	3.0686	426.5513	10.54222423
197	1.97	3.0693	426.3433	10.54341647
198	1.98	3.07	426.1364	10.54460833
199	1.99	3.0708	425.9305	10.54599

200	2	3.0715	425.7256	10.54718099
201	2.01	3.0722	425.5217	10.5483716
202	2.02	3.0729	425.3187	10.54956179
203	2.03	3.0737	425.1168	10.55094151
204	2.04	3.0744	424.9159	10.55213086
205	2.05	3.0751	424.7159	10.55331981
206	2.06	3.0758	424.5169	10.55450836
207	2.07	3.0766	424.3189	10.55588612
208	2.08	3.0773	424.1218	10.5570738
209	2.09	3.078	423.9257	10.5582611
210	2.1	3.0787	423.7306	10.559448
211	2.11	3.0795	423.5363	10.56082378
212	2.12	3.0802	423.3431	10.56200982
213	2.13	3.0809	423.1507	10.56319543
214	2.14	3.0816	422.9593	10.56438066
215	2.15	3.0824	422.7688	10.56575448
216	2.16	3.0831	422.5792	10.56693883
217	2.17	3.0838	422.3905	10.56812278
218	2.18	3.0845	422.2027	10.56930633
219	2.19	3.0852	422.0159	10.57048949
220	2.2	3.086	421.8299	10.57186085
221	2.21	3.0867	421.6448	10.57304312
222	2.22	3.0874	421.4606	10.57422499
223	2.23	3.0881	421.2773	10.57540646
224	2.24	3.0888	421.0948	10.57658752
225	2.25	3.0896	420.9132	10.57795642
226	2.26	3.0903	420.7325	10.5791366
227	2.27	3.091	420.5526	10.58031637
228	2.28	3.0917	420.3736	10.58149574
229	2.29	3.0924	420.1954	10.58267469
230	2.3	3.0931	420.0181	10.58385325
231	2.31	3.0939	419.8416	10.5852192
232	2.32	3.0946	419.666	10.58639687
233	2.33	3.0953	419.4912	10.58757414
234	2.34	3.096	419.3172	10.58875099
235	2.35	3.0967	419.144	10.58992743
236	2.36	3.0974	418.9716	10.59110346
237	2.37	3.0982	418.8001	10.59246645
238	2.38	3.0989	418.6293	10.59364158
239	2.39	3.0996	418.4594	10.59481632
240	2.4	3.1003	418.2902	10.59599064

241	2.41	3.101	418.1218	10.59716454
242	2.42	3.1017	417.9543	10.59833805
243	2.43	3.1025	417.7875	10.59969805
244	2.44	3.1032	417.6215	10.60087065
245	2.45	3.1039	417.4562	10.60204283
246	2.46	3.1046	417.2917	10.60321461
247	2.47	3.1053	417.128	10.60438597
248	2.48	3.106	416.9651	10.60555693
249	2.49	3.1068	416.8029	10.60691393
250	2.5	3.1075	416.6415	10.60808398
251	2.51	3.1082	416.4808	10.60925361
252	2.52	3.1089	416.3208	10.61042282
253	2.53	3.1096	416.1616	10.61159163
254	2.54	3.1103	416.0031	10.61276001
255	2.55	3.111	415.8454	10.61392799
256	2.56	3.1118	415.6884	10.61528149
257	2.57	3.1125	415.5321	10.61644855
258	2.58	3.1132	415.3765	10.61761519
259	2.59	3.1139	415.2217	10.61878143
260	2.6	3.1146	415.0675	10.61994723
261	2.61	3.1153	414.9141	10.62111263
262	2.62	3.1161	414.7614	10.62246311
263	2.63	3.1168	414.6093	10.62362758
264	2.64	3.1175	414.458	10.62479165
265	2.65	3.1182	414.3073	10.62595528
266	2.66	3.1189	414.1574	10.62711851
267	2.67	3.1196	414.0081	10.62828131
268	2.68	3.1204	413.8595	10.62962874
269	2.69	3.1211	413.7116	10.63079063
270	2.7	3.1218	413.5644	10.6319521
271	2.71	3.1225	413.4178	10.63311314
272	2.72	3.1232	413.2719	10.63427376
273	2.73	3.124	413.1266	10.63561863
274	2.74	3.1247	412.9821	10.63677834
275	2.75	3.1254	412.8381	10.63793761
276	2.76	3.1261	412.6948	10.63909646
277	2.77	3.1268	412.5522	10.64025489
278	2.78	3.1276	412.4102	10.6415972
279	2.79	3.1283	412.2689	10.64275472
280	2.8	3.129	412.1282	10.64391181
281	2.81	3.1297	411.9881	10.64506846

282	2.82	3.1304	411.8486	10.64622468
283	2.83	3.1312	411.7098	10.64756443
284	2.84	3.1319	411.5716	10.64871973
285	2.85	3.1326	411.4341	10.64987462
286	2.86	3.1333	411.2971	10.65102907
287	2.87	3.1341	411.1608	10.65236674
288	2.88	3.1348	411.025	10.65352025
289	2.89	3.1355	410.8899	10.65467335
290	2.9	3.1362	410.7554	10.65582602
291	2.91	3.137	410.6215	10.6571616
292	2.92	3.1377	410.4882	10.65831335
293	2.93	3.1384	410.3554	10.65946464
294	2.94	3.1392	410.2233	10.66079864
295	2.95	3.1399	410.0918	10.66194902
296	2.96	3.1406	409.9608	10.66309896
297	2.97	3.1413	409.8304	10.66424848
298	2.98	3.1421	409.7006	10.66558037
299	2.99	3.1428	409.5714	10.66672896
300	3	3.1435	409.4428	10.66787712
301	3.01	3.1443	409.3147	10.66920742
302	3.02	3.145	409.1872	10.67035463
303	3.03	3.1457	409.0602	10.67150141
304	3.04	3.1465	408.9338	10.67283011
305	3.05	3.1472	408.808	10.67397596
306	3.06	3.148	408.6827	10.67530357
307	3.07	3.1487	408.558	10.67644848
308	3.08	3.1494	408.4338	10.67759294
309	3.09	3.1502	408.3102	10.67891896
310	3.1	3.1509	408.1871	10.68006249
311	3.11	3.1516	408.0646	10.68120559
312	3.12	3.1524	407.9426	10.68253
313	3.13	3.1531	407.8211	10.68367215
314	3.14	3.1539	407.7002	10.68499547
315	3.15	3.1546	407.5798	10.68613668
316	3.16	3.1554	407.4599	10.68745888
317	3.17	3.1561	407.3406	10.68859916
318	3.18	3.1568	407.2218	10.689739
319	3.19	3.1576	407.1034	10.69105958
320	3.2	3.1583	406.9857	10.69219848
321	3.21	3.1591	406.8684	10.69351798
322	3.22	3.1598	406.7516	10.69465591

323	3.23	3.1606	406.6354	10.69597432
324	3.24	3.1613	406.5196	10.69711113
325	3.25	3.1621	406.4044	10.6984286
326	3.26	3.1628	406.2896	10.69956463
327	3.27	3.1636	406.1754	10.70088083
328	3.28	3.1644	406.0616	10.70219642
329	3.29	3.1651	405.9483	10.70333099
330	3.3	3.1659	405.8356	10.70464549
331	3.31	3.1666	405.7233	10.70577911
332	3.32	3.1674	405.6115	10.7070925
333	3.33	3.1682	405.5002	10.70840529
334	3.34	3.1689	405.3894	10.70953745
335	3.35	3.1697	405.279	10.71084912
336	3.36	3.1704	405.1691	10.71198032
337	3.37	3.1712	405.0597	10.71329089
338	3.38	3.172	404.9508	10.71460087
339	3.39	3.1727	404.8423	10.7157306
340	3.4	3.1735	404.7343	10.71703946
341	3.41	3.1743	404.6268	10.71834773
342	3.42	3.175	404.5197	10.71947599
343	3.43	3.1758	404.4131	10.72078314
344	3.44	3.1766	404.307	10.72208971
345	3.45	3.1774	404.2013	10.72339567
346	3.46	3.1781	404.096	10.72452193
347	3.47	3.1789	403.9912	10.72582677
348	3.48	3.1797	403.8869	10.72713102
349	3.49	3.1805	403.783	10.72843467
350	3.5	3.1812	403.6795	10.72955894
351	3.51	3.182	403.5765	10.73086147
352	3.52	3.1828	403.4739	10.73216339
353	3.53	3.1836	403.3718	10.73346473
354	3.54	3.1844	403.2701	10.73476546
355	3.55	3.1852	403.1688	10.73606559
356	3.56	3.186	403.068	10.73736512
357	3.57	3.1867	402.9676	10.73848585
358	3.58	3.1875	402.8676	10.73978426
359	3.59	3.1883	402.768	10.74108206
360	3.6	3.1891	402.6689	10.74237927
361	3.61	3.1899	402.5702	10.74367588
362	3.62	3.1907	402.4719	10.74497188
363	3.63	3.1915	402.374	10.74626728

364	3.64	3.1923	402.2765	10.74756208
365	3.65	3.1931	402.1795	10.74885628
366	3.66	3.1939	402.0828	10.75014987
367	3.67	3.1947	401.9866	10.75144287
368	3.68	3.1955	401.8907	10.75273524
369	3.69	3.1963	401.7953	10.75402703
370	3.7	3.1971	401.7003	10.75531822
371	3.71	3.1979	401.6056	10.75660878
372	3.72	3.1988	401.5114	10.75807574
373	3.73	3.1996	401.4176	10.75936503
374	3.74	3.2004	401.3241	10.7606537
375	3.75	3.2012	401.2311	10.76194179
376	3.76	3.202	401.1384	10.76322926
377	3.77	3.2028	401.0462	10.76451614
378	3.78	3.2037	400.9543	10.76597887
379	3.79	3.2045	400.8628	10.76726444
380	3.8	3.2053	400.7717	10.76854942
381	3.81	3.2061	400.6809	10.76983377
382	3.82	3.207	400.5906	10.77129367
383	3.83	3.2078	400.5006	10.77257674
384	3.84	3.2086	400.411	10.7738592
385	3.85	3.2094	400.3218	10.77514106
386	3.86	3.2103	400.2329	10.7765981
387	3.87	3.2111	400.1444	10.77787866
388	3.88	3.212	400.0563	10.77933424
389	3.89	3.2128	399.9686	10.78061352
390	3.9	3.2136	399.8812	10.78189217
391	3.91	3.2145	399.7941	10.78334557
392	3.92	3.2153	399.7075	10.78462294
393	3.93	3.2162	399.6212	10.78607489
394	3.94	3.217	399.5352	10.78735094
395	3.95	3.2179	399.4496	10.7888014
396	3.96	3.2187	399.3644	10.79007617
397	3.97	3.2196	399.2795	10.79152517
398	3.98	3.2204	399.195	10.79279863
399	3.99	3.2213	399.1108	10.79424615
400	4	3.2221	399.027	10.79551832
401	4.01	3.223	398.9435	10.79696437
402	4.02	3.2239	398.8603	10.79840962
403	4.03	3.2247	398.7775	10.79967979
404	4.04	3.2256	398.6951	10.80112359

405	4.05	3.2265	398.613	10.8025666
406	4.06	3.2273	398.5312	10.80383476
407	4.07	3.2282	398.4497	10.80527628
408	4.08	3.2291	398.3686	10.80671703
409	4.09	3.23	398.2878	10.80815698
410	4.1	3.2309	398.2074	10.80959616
411	4.11	3.2317	398.1273	10.81086095
412	4.12	3.2326	398.0475	10.81229864
413	4.13	3.2335	397.968	10.81373554
414	4.14	3.2344	397.8889	10.81517167
415	4.15	3.2353	397.8101	10.81660701
416	4.16	3.2362	397.7316	10.81804156
417	4.17	3.2371	397.6534	10.81947532
418	4.18	3.238	397.5755	10.82090829
419	4.19	3.2389	397.498	10.82234049
420	4.2	3.2398	397.4208	10.82377189
421	4.21	3.2407	397.3439	10.82520251
422	4.22	3.2416	397.2673	10.82663234
423	4.23	3.2425	397.191	10.82806138
424	4.24	3.2434	397.115	10.82948963
425	4.25	3.2443	397.0394	10.83091711
426	4.26	3.2452	396.964	10.83234378
427	4.27	3.2461	396.889	10.83376968
428	4.28	3.2471	396.8142	10.83536681
429	4.29	3.248	396.7398	10.83679104
430	4.3	3.2489	396.6656	10.83821447
431	4.31	3.2498	396.5918	10.83963712
432	4.32	3.2508	396.5183	10.84123065
433	4.33	3.2517	396.445	10.84265162
434	4.34	3.2526	396.3721	10.84407182
435	4.35	3.2536	396.2994	10.84566258
436	4.36	3.2545	396.2271	10.84708111
437	4.37	3.2554	396.155	10.84849884
438	4.38	3.2564	396.0832	10.85008686
439	4.39	3.2573	396.0117	10.85150292
440	4.4	3.2583	395.9405	10.85308908
441	4.41	3.2592	395.8696	10.85450347
442	4.42	3.2602	395.799	10.85608778
443	4.43	3.2611	395.7286	10.85750048
444	4.44	3.2621	395.6586	10.85908293
445	4.45	3.2631	395.5888	10.86066438

446	4.46	3.264	395.5193	10.86207454
447	4.47	3.265	395.45	10.8636541
448	4.48	3.266	395.3811	10.86523271
449	4.49	3.2669	395.3124	10.86664031
450	4.5	3.2679	395.244	10.86821704
451	4.51	3.2689	395.1759	10.86979279
452	4.52	3.2699	395.1081	10.87136756
453	4.53	3.2708	395.0405	10.87277172
454	4.54	3.2718	394.9732	10.87434462
455	4.55	3.2728	394.9061	10.87591651
456	4.56	3.2738	394.8393	10.87748743
457	4.57	3.2748	394.7728	10.87905737
458	4.58	3.2758	394.7066	10.88062633
459	4.59	3.2768	394.6406	10.88219429
460	4.6	3.2778	394.5749	10.88376127
461	4.61	3.2788	394.5094	10.88532725
462	4.62	3.2798	394.4442	10.88689226
463	4.63	3.2808	394.3793	10.88845629
464	4.64	3.2818	394.3146	10.89001932
465	4.65	3.2829	394.2502	10.89174977
466	4.66	3.2839	394.186	10.89331072
467	4.67	3.2849	394.1221	10.89487069
468	4.68	3.2859	394.0584	10.89642967
469	4.69	3.2869	393.995	10.89798767
470	4.7	3.288	393.9318	10.89971255
471	4.71	3.289	393.8689	10.90126848
472	4.72	3.2901	393.8062	10.90299106
473	4.73	3.2911	393.7438	10.90454491
474	4.74	3.2921	393.6816	10.90609777
475	4.75	3.2932	393.6197	10.90781699
476	4.76	3.2942	393.558	10.90936777
477	4.77	3.2953	393.4965	10.91108468
478	4.78	3.2963	393.4353	10.91263338
479	4.79	3.2974	393.3744	10.91434803
480	4.8	3.2985	393.3136	10.91606145
481	4.81	3.2995	393.2532	10.917607
482	4.82	3.3006	393.1929	10.91931813
483	4.83	3.3017	393.1329	10.92102807
484	4.84	3.3027	393.0731	10.92257043
485	4.85	3.3038	393.0136	10.92427809
486	4.86	3.3049	392.9542	10.92598452

487	4.87	3.306	392.8952	10.92768978
488	4.88	3.3071	392.8363	10.92939381
489	4.89	3.3082	392.7777	10.93109665
490	4.9	3.3093	392.7193	10.93279829
491	4.91	3.3104	392.6611	10.93449871
492	4.92	3.3115	392.6032	10.93619795
493	4.93	3.3126	392.5455	10.93789598
494	4.94	3.3137	392.488	10.9395928
495	4.95	3.3148	392.4307	10.94128842
496	4.96	3.3159	392.3736	10.94298283
497	4.97	3.317	392.3168	10.94467605
498	4.98	3.3181	392.2602	10.94636806
499	4.99	3.3193	392.2038	10.94822357
500	5	3.3204	392.1476	10.94991305
501	5.01	3.3215	392.0917	10.95160135
502	5.02	3.3227	392.0359	10.95345278
503	5.03	3.3238	391.9804	10.95513856
504	5.04	3.3249	391.9251	10.95682312
505	5.05	3.3261	391.87	10.9586705
506	5.06	3.3272	391.8151	10.96035254
507	5.07	3.3284	391.7605	10.96219718
508	5.08	3.3295	391.706	10.9638767
509	5.09	3.3307	391.6517	10.96571856
510	5.1	3.3319	391.5977	10.967559
511	5.11	3.333	391.5439	10.9692347
512	5.12	3.3342	391.4902	10.97107236
513	5.13	3.3354	391.4368	10.97290861
514	5.14	3.3366	391.3836	10.97474342
515	5.15	3.3377	391.3306	10.97641396
516	5.16	3.3389	391.2777	10.97824599
517	5.17	3.3401	391.2251	10.9800766
518	5.18	3.3413	391.1727	10.98190578
519	5.19	3.3425	391.1205	10.98373352
520	5.2	3.3437	391.0685	10.98555982
521	5.21	3.3449	391.0167	10.98738468
522	5.22	3.3461	390.965	10.98920808
523	5.23	3.3474	390.9136	10.99119193
524	5.24	3.3486	390.8624	10.99301236
525	5.25	3.3498	390.8114	10.99483135
526	5.26	3.351	390.7605	10.99664888
527	5.27	3.3523	390.7099	10.99862636

528	5.28	3.3535	390.6594	11.0004409
529	5.29	3.3547	390.6091	11.002254
530	5.3	3.356	390.5591	11.00422667
531	5.31	3.3572	390.5092	11.00603678
532	5.32	3.3585	390.4595	11.00800619
533	5.33	3.3597	390.41	11.0098133
534	5.34	3.361	390.3606	11.01177944
535	5.35	3.3622	390.3115	11.01358355
536	5.36	3.3635	390.2626	11.01554647
537	5.37	3.3648	390.2138	11.01750767
538	5.38	3.3661	390.1652	11.01946719
539	5.39	3.3673	390.1168	11.02126518
540	5.4	3.3686	390.0686	11.02322145
541	5.41	3.3699	390.0205	11.02517601
542	5.42	3.3712	389.9727	11.0271289
543	5.43	3.3725	389.925	11.02908009
544	5.44	3.3738	389.8775	11.03102959
545	5.45	3.3751	389.8302	11.0329774
546	5.46	3.3764	389.783	11.0349235
547	5.47	3.3777	389.736	11.03686791
548	5.48	3.3791	389.6892	11.03896929
549	5.49	3.3804	389.6426	11.0409102
550	5.5	3.3817	389.5962	11.04284943
551	5.51	3.3831	389.5499	11.04494519
552	5.52	3.3844	389.5038	11.04688089
553	5.53	3.3857	389.4578	11.04881487
554	5.54	3.3871	389.4121	11.05090505
555	5.55	3.3884	389.3665	11.05283553
556	5.56	3.3898	389.321	11.05492188
557	5.57	3.3912	389.2758	11.0570063
558	5.58	3.3925	389.2307	11.05893144
559	5.59	3.3939	389.1858	11.06101206
560	5.6	3.3953	389.141	11.0630907
561	5.61	3.3966	389.0964	11.0650105
562	5.62	3.398	389.052	11.06708537
563	5.63	3.3994	389.0077	11.06915826
564	5.64	3.4008	388.9636	11.07122918
565	5.65	3.4022	388.9197	11.07329816
566	5.66	3.4036	388.8759	11.07536515
567	5.67	3.405	388.8323	11.07743018
568	5.68	3.4064	388.7888	11.07949324

569	5.69	3.4079	388.7455	11.0817101
570	5.7	3.4093	388.7023	11.08376908
571	5.71	3.4107	388.6594	11.08582612
572	5.72	3.4121	388.6165	11.08788117
573	5.73	3.4136	388.5739	11.09008946
574	5.74	3.415	388.5313	11.09214043
575	5.75	3.4165	388.489	11.09434435
576	5.76	3.4179	388.4468	11.09639127
577	5.77	3.4194	388.4047	11.0985908
578	5.78	3.4209	388.3628	11.10078809
579	5.79	3.4223	388.321	11.10282881
580	5.8	3.4238	388.2794	11.10502174
581	5.81	3.4253	388.238	11.10721241
582	5.82	3.4268	388.1967	11.10940081
583	5.83	3.4282	388.1555	11.11143325
584	5.84	3.4297	388.1145	11.11361729
585	5.85	3.4312	388.0737	11.11579908
586	5.86	3.4328	388.033	11.11813186
587	5.87	3.4343	387.9924	11.12030896
588	5.88	3.4358	387.952	11.12248382
589	5.89	3.4373	387.9117	11.12465641
590	5.9	3.4388	387.8716	11.12682675
591	5.91	3.4404	387.8316	11.12914731
592	5.92	3.4419	387.7918	11.13131299
593	5.93	3.4434	387.7521	11.1334764
594	5.94	3.445	387.7125	11.13578957
595	5.95	3.4466	387.6731	11.13810017
596	5.96	3.4481	387.6338	11.1402565
597	5.97	3.4497	387.5947	11.14256213
598	5.98	3.4513	387.5557	11.14486519
599	5.99	3.4528	387.5168	11.14701443
600	6	3.4544	387.4781	11.14931251
601	6.01	3.456	387.4395	11.15160801
602	6.02	3.4576	387.4011	11.15390095
603	6.03	3.4592	387.3628	11.15619132
604	6.04	3.4608	387.3246	11.1584791
605	6.05	3.4624	387.2865	11.16076431
606	6.06	3.464	387.2486	11.16304696
607	6.07	3.4657	387.2109	11.165477
608	6.08	3.4673	387.1732	11.16775434
609	6.09	3.4689	387.1357	11.17002912

610	6.1	3.4706	387.0983	11.17245077
611	6.11	3.4722	387.0611	11.17472026
612	6.12	3.4739	387.024	11.17713629
613	6.13	3.4755	386.987	11.17940046
614	6.14	3.4772	386.9501	11.18181084
615	6.15	3.4789	386.9134	11.18421833
616	6.16	3.4805	386.8768	11.18647448
617	6.17	3.4822	386.8403	11.18887633
618	6.18	3.4839	386.804	11.19127529
619	6.19	3.4856	386.7678	11.19367135
620	6.2	3.4873	386.7317	11.19606449
621	6.21	3.489	386.6957	11.19845474
622	6.22	3.4907	386.6599	11.20084209
623	6.23	3.4925	386.6241	11.20337377
624	6.24	3.4942	386.5885	11.20575514
625	6.25	3.4959	386.5531	11.20813363
626	6.26	3.4977	386.5177	11.21065591
627	6.27	3.4994	386.4825	11.21302841
628	6.28	3.5012	386.4474	11.21554438
629	6.29	3.5029	386.4124	11.2179109
630	6.3	3.5047	386.3775	11.22042054
631	6.31	3.5065	386.3428	11.22292694
632	6.32	3.5083	386.3081	11.22543007
633	6.33	3.51	386.2736	11.22778447
634	6.34	3.5118	386.2392	11.23028128
635	6.35	3.5136	386.2049	11.23277484
636	6.36	3.5154	386.1708	11.23526516
637	6.37	3.5173	386.1367	11.23789696
638	6.38	3.5191	386.1028	11.24038059
639	6.39	3.5209	386.069	11.24286097
640	6.4	3.5227	386.0353	11.24533808
641	6.41	3.5246	386.0017	11.24795597
642	6.42	3.5264	385.9682	11.25042639
643	6.43	3.5283	385.9348	11.25303722
644	6.44	3.5301	385.9016	11.25550098
645	6.45	3.532	385.8684	11.25810474
646	6.46	3.5339	385.8354	11.2607049
647	6.47	3.5358	385.8025	11.26330144
648	6.48	3.5377	385.7697	11.26589435
649	6.49	3.5396	385.737	11.26848363
650	6.5	3.5415	385.7044	11.27106929

651	6.51	3.5434	385.6719	11.27365132
652	6.52	3.5453	385.6395	11.27622973
653	6.53	3.5472	385.6073	11.27880453
654	6.54	3.5491	385.5751	11.28137569
655	6.55	3.5511	385.543	11.2840846
656	6.56	3.553	385.5111	11.28664834
657	6.57	3.555	385.4793	11.28934944
658	6.58	3.5569	385.4475	11.29190572
659	6.59	3.5589	385.4159	11.29459899
660	6.6	3.5609	385.3843	11.29728822
661	6.61	3.5629	385.3529	11.29997346
662	6.62	3.5649	385.3216	11.30265468
663	6.63	3.5669	385.2904	11.3053319
664	6.64	3.5689	385.2593	11.3080051
665	6.65	3.5709	385.2282	11.31067426
666	6.66	3.5729	385.1973	11.31333943
667	6.67	3.5749	385.1665	11.31600059
668	6.68	3.577	385.1358	11.31879651
669	6.69	3.579	385.1052	11.32144944
670	6.7	3.5811	385.0746	11.3242367
671	6.71	3.5831	385.0442	11.32688141
672	6.72	3.5852	385.0139	11.32966006
673	6.73	3.5873	384.9837	11.33243429
674	6.74	3.5894	384.9535	11.33520407
675	6.75	3.5915	384.9235	11.33796945
676	6.76	3.5936	384.8936	11.34073041
677	6.77	3.5957	384.8637	11.34348693
678	6.78	3.5978	384.834	11.34623904
679	6.79	3.5999	384.8043	11.34898672
680	6.8	3.602	384.7748	11.35172999
681	6.81	3.6042	384.7453	11.35460487
682	6.82	3.6063	384.7159	11.35733907
683	6.83	3.6085	384.6866	11.36020447
684	6.84	3.6107	384.6574	11.36306502
685	6.85	3.6128	384.6284	11.36578556
686	6.86	3.615	384.5993	11.36863661
687	6.87	3.6172	384.5704	11.37148283
688	6.88	3.6194	384.5416	11.3743242
689	6.89	3.6216	384.5129	11.37716072
690	6.9	3.6238	384.4842	11.37999236
691	6.91	3.626	384.4557	11.38281918

692	6.92	3.6283	384.4272	11.38577477
693	6.93	3.6305	384.3988	11.38859165
694	6.94	3.6328	384.3705	11.39153687
695	6.95	3.635	384.3423	11.39434383
696	6.96	3.6373	384.3142	11.39727869
697	6.97	3.6396	384.2862	11.40020825
698	6.98	3.6419	384.2582	11.40313248
699	6.99	3.6441	384.2304	11.40591939
700	7	3.6464	384.2026	11.40883326
701	7.01	3.6488	384.1749	11.41187343
702	7.02	3.6511	384.1473	11.41477647
703	7.03	3.6534	384.1198	11.41767422
704	7.04	3.6557	384.0923	11.42056665
705	7.05	3.6581	384.065	11.42358447
706	7.06	3.6605	384.0377	11.4265965
707	7.07	3.6628	384.0105	11.42947258
708	7.08	3.6652	383.9834	11.43247331
709	7.09	3.6676	383.9564	11.43546829
710	7.1	3.67	383.9294	11.43845747
711	7.11	3.6724	383.9026	11.44144091
712	7.12	3.6748	383.8758	11.44441857
713	7.13	3.6772	383.8491	11.44739046
714	7.14	3.6796	383.8224	11.45035656
715	7.15	3.6821	383.7959	11.45344519
716	7.16	3.6845	383.7694	11.45639952
717	7.17	3.687	383.743	11.45947586
718	7.18	3.6895	383.7167	11.46254596
719	7.19	3.6919	383.6904	11.4654825
720	7.2	3.6944	383.6643	11.46854034
721	7.21	3.6969	383.6382	11.4715919
722	7.22	3.6994	383.6122	11.47463721
723	7.23	3.7019	383.5862	11.47767624
724	7.24	3.7045	383.5604	11.48083508
725	7.25	3.707	383.5346	11.48386136
726	7.26	3.7095	383.5089	11.48688139
727	7.27	3.7121	383.4832	11.49002042
728	7.28	3.7147	383.4577	11.49315272
729	7.29	3.7172	383.4322	11.49615347
730	7.3	3.7198	383.4067	11.49927245
731	7.31	3.7224	383.3814	11.5023847
732	7.32	3.725	383.3561	11.50549017

733	7.33	3.7277	383.3309	11.50871259
734	7.34	3.7303	383.3058	11.51180428
735	7.35	3.7329	383.2807	11.51488919
736	7.36	3.7356	383.2557	11.51809027
737	7.37	3.7382	383.2308	11.5211614
738	7.38	3.7409	383.2059	11.52434815
739	7.39	3.7436	383.1811	11.52752761
740	7.4	3.7463	383.1564	11.53069979
741	7.41	3.749	383.1318	11.53386468
742	7.42	3.7517	383.1072	11.53702227
743	7.43	3.7544	383.0827	11.54017256
744	7.44	3.7571	383.0582	11.54331555
745	7.45	3.7599	383.0338	11.54657176
746	7.46	3.7626	383.0095	11.54969991
747	7.47	3.7654	382.9853	11.55294073
748	7.48	3.7682	382.9611	11.55617369
749	7.49	3.771	382.937	11.55939882
750	7.5	3.7737	382.9129	11.56249698
751	7.51	3.7766	382.8889	11.56582554
752	7.52	3.7794	382.865	11.56902715
753	7.53	3.7822	382.8411	11.57222091
754	7.54	3.785	382.8173	11.57540683
755	7.55	3.7879	382.7936	11.57870264
756	7.56	3.7908	382.7699	11.58199002
757	7.57	3.7936	382.7463	11.58515188
758	7.58	3.7965	382.7228	11.58842275
759	7.59	3.7994	382.6993	11.59168521
760	7.6	3.8023	382.6758	11.59493924
761	7.61	3.8053	382.6525	11.59830087
762	7.62	3.8082	382.6292	11.60153782
763	7.63	3.8111	382.6059	11.60476635
764	7.64	3.8141	382.5827	11.60810158
765	7.65	3.8171	382.5596	11.61142782
766	7.66	3.82	382.5365	11.61463056
767	7.67	3.823	382.5135	11.61793911
768	7.68	3.826	382.4906	11.62123868
769	7.69	3.829	382.4677	11.62452924
770	7.7	3.8321	382.4449	11.62792413
771	7.71	3.8351	382.4221	11.6311964
772	7.72	3.8382	382.3994	11.63457239
773	7.73	3.8412	382.3767	11.63782638

774	7.74	3.8443	382.3541	11.64118347
775	7.75	3.8474	382.3315	11.64453095
776	7.76	3.8505	382.309	11.64786884
777	7.77	3.8536	382.2866	11.65119715
778	7.78	3.8567	382.2642	11.65451584
779	7.79	3.8598	382.2419	11.65782494
780	7.8	3.863	382.2196	11.66123466
781	7.81	3.8662	382.1974	11.66463416
782	7.82	3.8693	382.1752	11.66791384
783	7.83	3.8725	382.1531	11.6712932
784	7.84	3.8757	382.131	11.67466233
785	7.85	3.8789	382.109	11.67802125
786	7.86	3.8821	382.087	11.68136993
787	7.87	3.8854	382.0651	11.68481639
788	7.88	3.8886	382.0432	11.6881443
789	7.89	3.8919	382.0214	11.69156935
790	7.9	3.8952	381.9997	11.69498354
791	7.91	3.8985	381.978	11.69838684
792	7.92	3.9018	381.9563	11.70177926
793	7.93	3.9051	381.9347	11.70516083
794	7.94	3.9084	381.9131	11.70853151
795	7.95	3.9117	381.8916	11.71189134
796	7.96	3.9151	381.8702	11.71534534
797	7.97	3.9185	381.8488	11.7187878
798	7.98	3.9219	381.8274	11.72221871
799	7.99	3.9252	381.8061	11.72553407
800	8	3.9287	381.7848	11.72904593
801	8.01	3.9321	381.7636	11.73244225
802	8.02	3.9355	381.7424	11.73582702
803	8.03	3.939	381.7213	11.73930293
804	8.04	3.9424	381.7002	11.7426643
805	8.05	3.9459	381.6792	11.74611612
806	8.06	3.9494	381.6582	11.7495557
807	8.07	3.9529	381.6372	11.75298306
808	8.08	3.9564	381.6163	11.7563982
809	8.09	3.9599	381.5955	11.75980115
810	8.1	3.9635	381.5746	11.76329205
811	8.11	3.9671	381.5539	11.76677007
812	8.12	3.9706	381.5331	11.77013563
813	8.13	3.9742	381.5125	11.77358816
814	8.14	3.9778	381.4918	11.77702774

815	8.15	3.9814	381.4712	11.7804544
816	8.16	3.9851	381.4507	11.78396622
817	8.17	3.9887	381.4301	11.78736666
818	8.18	3.9924	381.4097	11.79085156
819	8.19	3.9961	381.3892	11.79432277
820	8.2	3.9997	381.3688	11.79768374
821	8.21	4.0035	381.3485	11.80122429
822	8.22	4.0072	381.3282	11.80465458
823	8.23	4.0109	381.3079	11.80807121
824	8.24	4.0147	381.2877	11.81156934
825	8.25	4.0184	381.2675	11.81495831
826	8.26	4.0222	381.2473	11.81842801
827	8.27	4.026	381.2272	11.82188333
828	8.28	4.0298	381.2072	11.82532427
829	8.29	4.0336	381.1871	11.82875079
830	8.3	4.0375	381.1671	11.83225579
831	8.31	4.0413	381.1472	11.83565318
832	8.32	4.0452	381.1272	11.83912823
833	8.33	4.0491	381.1073	11.84258815
834	8.34	4.053	381.0875	11.84603293
835	8.35	4.0569	381.0677	11.84946255
836	8.36	4.0609	381.0479	11.85296753
837	8.37	4.0648	381.0282	11.85636645
838	8.38	4.0688	381.0084	11.85983993
839	8.39	4.0727	380.9888	11.86320817
840	8.4	4.0767	380.9691	11.86665018
841	8.41	4.0808	380.9495	11.87016483
842	8.42	4.0848	380.93	11.8735746
843	8.43	4.0888	380.9104	11.8769684
844	8.44	4.0929	380.8909	11.88043363
845	8.45	4.097	380.8715	11.88388214
846	8.46	4.1011	380.852	11.88731387
847	8.47	4.1052	380.8326	11.89072888
848	8.48	4.1093	380.8133	11.89412717
849	8.49	4.1135	380.7939	11.89759398
850	8.5	4.1176	380.7746	11.90095837
851	8.51	4.1218	380.7553	11.90439048
852	8.52	4.126	380.7361	11.90780505
853	8.53	4.1302	380.7169	11.91120205
854	8.54	4.1344	380.6977	11.91458148
855	8.55	4.1387	380.6785	11.91802613

856	8.56	4.1429	380.6594	11.92137003
857	8.57	4.1472	380.6403	11.92477831
858	8.58	4.1515	380.6213	11.92816821
859	8.59	4.1558	380.6022	11.93153967
860	8.6	4.1602	380.5832	11.9349734
861	8.61	4.1645	380.5643	11.93830767
862	8.62	4.1689	380.5453	11.94170329
863	8.63	4.1732	380.5264	11.9450003
864	8.64	4.1777	380.5075	11.94843676
865	8.65	4.1821	380.4886	11.95177459
866	8.66	4.1865	380.4698	11.95509317
867	8.67	4.191	380.451	11.95847008
868	8.68	4.1954	380.4322	11.96174968
869	8.69	4.1999	380.4134	11.96508672
870	8.7	4.2044	380.3947	11.96840365
871	8.71	4.209	380.376	11.97177622
872	8.72	4.2135	380.3573	11.97505239
873	8.73	4.2181	380.3387	11.97838334
874	8.74	4.2226	380.32	11.98161876
875	8.75	4.2272	380.3014	11.98490805
876	8.76	4.2319	380.2828	11.98824983
877	8.77	4.2365	380.2643	11.99149659
878	8.78	4.2411	380.2457	11.99472227
879	8.79	4.2458	380.2272	11.99799908
880	8.8	4.2505	380.2088	12.00125395
881	8.81	4.2552	380.1903	12.00448681
882	8.82	4.26	380.1718	12.00776845
883	8.83	4.2647	380.1534	12.01095692
884	8.84	4.2695	380.135	12.01419323
885	8.85	4.2743	380.1166	12.01740662
886	8.86	4.2791	380.0983	12.02059713
887	8.87	4.2839	380.08	12.02376472
888	8.88	4.2887	380.0616	12.02690937
889	8.89	4.2936	380.0434	12.03009858
890	8.9	4.2985	380.0251	12.03326388
891	8.91	4.3034	380.0068	12.03640531
892	8.92	4.3083	379.9886	12.0395229
893	8.93	4.3132	379.9704	12.04261661
894	8.94	4.3182	379.9522	12.04575142
895	8.95	4.3232	379.934	12.04886137
896	8.96	4.3282	379.9159	12.0519465

897	8.97	4.3332	379.8977	12.05500675
898	8.98	4.3383	379.8796	12.05810515
899	8.99	4.3433	379.8615	12.06111523
900	9	4.3484	379.8434	12.06416243
901	9.01	4.3535	379.8253	12.06718378
902	9.02	4.3586	379.8073	12.07017931
903	9.03	4.3638	379.7893	12.07320943
904	9.04	4.3689	379.7712	12.07615272
905	9.05	4.3741	379.7532	12.07912962
906	9.06	4.3793	379.7353	12.08207967
907	9.07	4.3846	379.7173	12.08506121
908	9.08	4.3898	379.6993	12.08795698
909	9.09	4.3951	379.6814	12.09088325
910	9.1	4.4004	379.6635	12.09378161
911	9.11	4.4057	379.6456	12.09665206
912	9.12	4.411	379.6277	12.09949461
913	9.13	4.4164	379.6098	12.10236447
914	9.14	4.4217	379.5919	12.10515068
915	9.15	4.4271	379.5741	12.10796318
916	9.16	4.4326	379.5562	12.11080029
917	9.17	4.438	379.5384	12.11355432
918	9.18	4.4435	379.5206	12.11633193
919	9.19	4.4489	379.5028	12.1190275
920	9.2	4.4544	379.485	12.12174556
921	9.21	4.46	379.4672	12.12448448
922	9.22	4.4655	379.4494	12.12714191
923	9.23	4.4711	379.4317	12.12981913
924	9.24	4.4767	379.4139	12.13246518
925	9.25	4.4823	379.3962	12.13508012
926	9.26	4.4879	379.3784	12.13766389
927	9.27	4.4936	379.3607	12.14026412
928	9.28	4.4993	379.343	12.14283209
929	9.29	4.505	379.3253	12.14536781
930	9.3	4.5107	379.3076	12.14787127
931	9.31	4.5165	379.29	12.1503878
932	9.32	4.5223	379.2723	12.15287091
933	9.33	4.5281	379.2546	12.15532062
934	9.34	4.5339	379.237	12.15773697
935	9.35	4.5397	379.2193	12.16011991
936	9.36	4.5456	379.2017	12.16251189
937	9.37	4.5515	379.1841	12.16486932

938	9.38	4.5574	379.1664	12.16719217
939	9.39	4.5633	379.1488	12.1694805
940	9.4	4.5693	379.1312	12.17177435
941	9.41	4.5753	379.1136	12.17403248
942	9.42	4.5813	379.096	12.17625488
943	9.43	4.5873	379.0784	12.17844155
944	9.44	4.5934	379.0608	12.18063018
945	9.45	4.5995	379.0433	12.18278192
946	9.46	4.6056	379.0257	12.1848967
947	9.47	4.6117	379.0081	12.18697457
948	9.48	4.6178	378.9906	12.18901555
949	9.49	4.624	378.973	12.19105422
950	9.5	4.6302	378.9554	12.19305476
951	9.51	4.6365	378.9379	12.19505059
952	9.52	4.6427	378.9203	12.19697425
953	9.53	4.649	378.9028	12.19889196
954	9.54	4.6553	378.8852	12.20077028
955	9.55	4.6616	378.8677	12.20260926
956	9.56	4.668	378.8502	12.20443915
957	9.57	4.6743	378.8326	12.20619874
958	9.58	4.6807	378.8151	12.20794802
959	9.59	4.6872	378.7975	12.20968501
960	9.6	4.6936	378.78	12.21135242
961	9.61	4.7001	378.7625	12.21300629
962	9.62	4.7066	378.7449	12.21461824
963	9.63	4.7131	378.7274	12.21618832
964	9.64	4.7197	378.7099	12.21774167
965	9.65	4.7263	378.6924	12.21925182
966	9.66	4.7329	378.6748	12.22071875
967	9.67	4.7395	378.6573	12.22214252
968	9.68	4.7462	378.6398	12.22354564
969	9.69	4.7529	378.6222	12.22490421
970	9.7	4.7596	378.6047	12.22621832
971	9.71	4.7663	378.5872	12.22748793
972	9.72	4.7731	378.5696	12.22873286
973	9.73	4.7799	378.5521	12.229932
974	9.74	4.7867	378.5345	12.23108526
975	9.75	4.7935	378.517	12.23219273
976	9.76	4.8004	378.4994	12.23327148
977	9.77	4.8073	378.4819	12.23430309
978	9.78	4.8142	378.4643	12.23528747

979	9.79	4.8212	378.4468	12.2362398
980	9.8	4.8281	378.4292	12.23712913
981	9.81	4.8351	378.4116	12.237985
982	9.82	4.8422	378.3941	12.23880535
983	9.83	4.8492	378.3765	12.23956342
984	9.84	4.8563	378.3589	12.24028454
985	9.85	4.8634	378.3413	12.24095572
986	9.86	4.8706	378.3237	12.24158714
987	9.87	4.8778	378.3061	12.24216721
988	9.88	4.885	378.2885	12.24269591
989	9.89	4.8922	378.2709	12.24317326
990	9.9	4.8994	378.2533	12.24359925
991	9.91	4.9067	378.2357	12.2439805
992	9.92	4.914	378.218	12.24430893
993	9.93	4.9214	378.2004	12.24458977
994	9.94	4.9287	378.1827	12.2448119
995	9.95	4.9361	378.1651	12.24498499
996	9.96	4.9436	378.1474	12.24510678
997	9.97	4.951	378.1297	12.24517062
998	9.98	4.9585	378.1121	12.24518176
999	9.99	4.966	378.0944	12.24513715
1000	10	4.9736	378.0767	12.24503683